Estudio Analitico - Grafico de los Poliedros Arquimedianos

LAMINAS 44 AL 47

VIII

Prof. T. Alvarez Peralto

VIII

Lámina 44	Poliedros arquimedianos Arquimediano XII ($1P_4 + 1P_6 + 1P_{10}$)	44

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el arquimediano XII, en el que en cada vértice concurren un cuadrado, un exágono y un decágono, todos regulares

La longitud de su lado es de 14.5 mm, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

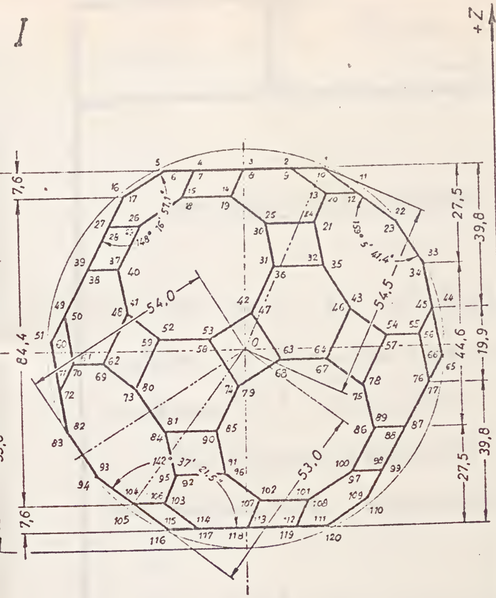
DATOS: O (72, 72, 85) mm

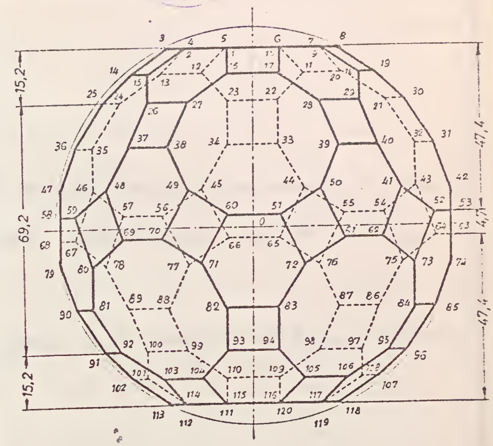
l_{XII} = 14.5 mm

5 - 5 - 73

I

III

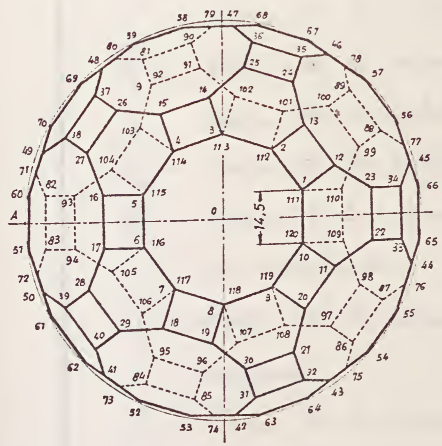




+X

O

+Y



ARQUIMEDIANO XII

Número de caras cuadradas.............	C_4 = 30
Número de caras exagonales.............	C_6 = 20
Número de caras decagonales.............	C_{10} = 12
Número de vértices............................	V = 120
Número de aristas.............................	A = 180
Número de caras de un ángulo sólido ..	$1P_4 + 1P_6 + 1P_{10}$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano XII, en el que en cada vértice concurren un cuadrado, un exágono y un decágono, todos regulares.

La longitud de su lado es de su lado es de 14,5 mm. y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1 : 1	Arquimediano XII					Lámina 44 Curso 19 -19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el "Arquimediano I", lám. 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del Arquimediano XII (dato del ejercicio)

a = Radio de la esfera circunscrita

b = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_4 = Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas.

c_6 = Radio de la esfera tangente a las caras exagonales

c_{10} = Radio de la esfera tangente a las caras decagonales

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

d_6 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal

d_{10} = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara decagonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_1 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una

cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquella.

α_6 = Angulo rectilineo del diedro formado por una cara exagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquella.

α_{10} = Angulo rectilineo del diedro formado por una cara decagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquella.

$\varphi_{4\text{-}6}$ = Angulo rectilineo del diedro formado por una cara cuadrada y otra exagonal.

$\varphi_{4\text{-}10}$ = Angulo rectilineo del diedro formado por una cara cuadrada y otra decagonal.

$\varphi_{6\text{-}10}$ = Angulo rectilineo del diedro formado por una cara exagonal y otra decagonal.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 30 caras cuadradas, 20 caras exagonales y 12 caras decagonales; 120 vértices y 180 aristas.

En cada vértice concurren un cuadrado, un exágono y un decágono, todos regulares de igual lado "l".

Así pues, tendremos que:

ARQUIMEDIANO XII $(1P_4 + 1P_6 + 1P_{10})$; $C_4 = 30$; $C_6 = 20$; $C_{10} = 12$; $V = 120$; $A = 180$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las tres aristas que concurren en un ángulo solido

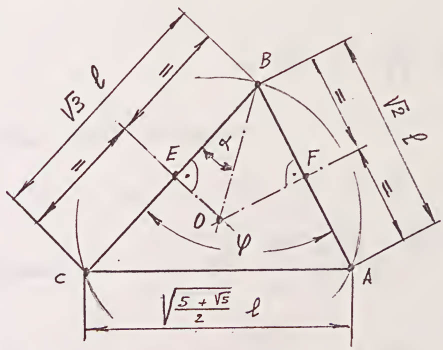


Figura 1

Este polígono es un triángulo A-B-C (fig. 1), escaleno, cuyos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, son respectivamente las diagonales que unen tres vértices consecutivos de un cuadrado, un exágono y un decágono, todos regulares y de lado "l".

Se demuestra en Geometria que estas diagonales son:

Lámina 44	Poliedros arquimedianos Arquimediano XII	Hoja nº 4

a) En el cuadrado (diagonal) $\overline{AB} = \sqrt{2}\ \ell$ [1]

b) En el exágono (lado del triángulo inscrito) $BC = \sqrt{3}\ \ell$ [2]

c) En el decágono (lado del pentágono regular inscrito) $CA = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\ \ell$ [3]

De la figura 1, se deduce:

$$\overline{BO} = \boxed{m = \frac{\overline{BE}}{\cos\alpha}} = \frac{\overline{BF}}{\cos(\varphi-\alpha)} \qquad [4]$$

de donde $\overline{BE} \times \cos(\varphi-\alpha) = \overline{BF} \times \cos\alpha$;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell\ \cos(\varphi-\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell\ \cos\alpha \quad ; \quad \sqrt{3}\ \cos(\varphi-\alpha) = \sqrt{2}\ \cos\alpha$$

$$\cos(\varphi-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \cos\alpha \qquad [5]$$

por otra parte tenemos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2\times\overline{BC}\times\overline{BA}\times\cos\varphi \quad ; \quad \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - \overline{AC}^2 = 2\times\overline{BC}\times\overline{BA}\times\cos\varphi$$

de donde $\boxed{\cos\varphi} = \dfrac{\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - \overline{AC}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{BA}} = \dfrac{(\sqrt{3}\ \ell)^2 + (\sqrt{2}\ \ell)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\ \ell\right)^2}{2\times\sqrt{3}\ \ell\times\sqrt{2}\ \ell} =$

$$= \frac{3+2-\frac{5+\sqrt{5}}{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{5-\frac{5+\sqrt{5}}{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{5-\sqrt{5}}{4\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}-\sqrt{30}}{4\times 6} = \boxed{\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{30}}{24}} \qquad [6]$$

De [5] se deduce:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\ \cos\alpha = \cos(\varphi-\alpha) = \cos\varphi\cos\alpha + \operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen}\alpha \qquad [7]$$

UNE A4 210 X 297

Despejando de [7] "$\cos\alpha$", y sustituyéndolo en [4], tendremos (ver desarrollo de este cálculo en lám. 43, págs 4 y 5)

$$m = \sqrt{\frac{5 - 6\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi}{4\left(1-\cos^2\varphi\right)}} \times l \qquad [8]$$

en la que "$\cos\varphi$" está dado por la expresión [6]. Para calcular m, tendremos:

a) Para el numerador del radical:

$$5-6\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi = 5-6\sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{30}}{24} = 5-6\times\frac{\sqrt{2}\left(5\sqrt{6}-\sqrt{30}\right)}{\sqrt{3}\times 24} =$$

$$= 5-6\times\frac{5\sqrt{12}-\sqrt{60}}{24\sqrt{3}} = 5-\frac{5\times 2\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{4\sqrt{3}} = 5-\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = 5-\frac{15-\sqrt{45}}{6} =$$

$$= 5-\frac{15-3\sqrt{5}}{6} = \frac{30-15+3\sqrt{5}}{6} = \frac{15+3\sqrt{5}}{6} = \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

b) Para el denominador del radical:

$$4\left(1-\cos^2\varphi\right) = 4\times\left(1-\left(\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{30}}{24}\right)^2\right) = 4\times\left(1-\frac{25\times 6+30-10\sqrt{180}}{24^2}\right) =$$

$$= 4\times\left(1-\frac{150+30-60\sqrt{5}}{24^2}\right) = 4\times\left(1-\frac{180-60\sqrt{5}}{24^2}\right) = 4\times\left(1-\frac{15-5\sqrt{5}}{2\times 24}\right) =$$

$$= 4\times\frac{48-15+5\sqrt{5}}{48} = \boxed{\frac{33+5\sqrt{5}}{12}}$$

cuyos valores, sustituidos en [8], nos dará finalmente:

$$\boxed{m} = \sqrt{\frac{5-6\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi}{4(1-\cos^2\varphi)}}\,\ell = \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2} : \frac{33+5\sqrt5}{12}} \times \ell = \sqrt{\frac{6(5+\sqrt5)}{33+5\sqrt5}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{6(5+\sqrt5)(33-5\sqrt5)}{33^2-125}} \times \ell = \sqrt{\frac{6(165+33\sqrt5-25\sqrt5-25)}{964}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{3(140+8\sqrt5)}{482}} \times \ell = \sqrt{\frac{3(70+4\sqrt5)}{241}} \times \ell = \boxed{\sqrt{\frac{6(35+2\sqrt5)}{241}} \times \ell} =$$

$$= 0{,}99\ 13\ 16\ 18\ldots\ \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $m = 0.99\ 16\ 16\ 18\ldots \times 14{,}46 = 14{,}3$ mm

---

Radio "a" de la esfera circunscrita

Aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33)

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2-m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2-\left(\sqrt{\frac{6(35+2\sqrt5)}{241}}\,\ell\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{6(35+2\sqrt5)}{241}}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{210+12\sqrt5}{241}}} \times \ell = \frac{1}{2\sqrt{\frac{241-210-12\sqrt5}{241}}} \times \ell = \frac{1}{2\sqrt{\frac{31-12\sqrt5}{241}}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{241}{31-12\sqrt5}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{241(31+12\sqrt5)}{31^2-12^2\times5}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{241(31+12\sqrt5)}{241}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{31+12\sqrt5} \times \ell = \boxed{\frac{\sqrt{31+12\sqrt5}}{2}\,\ell} = 3{,}80\ 23\ 94\ 50\ldots\ \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $a = 55$ mm $\quad \ell = 14{,}46$ mm

---

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33)

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{31+12\sqrt{5}}}{2}\,\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{31+12\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{30+12\sqrt{5}}{4}} \times \ell = \boxed{\frac{\sqrt{30+12\sqrt{5}}}{2}\,\ell} = 3,76\,93\,77\,13\ldots\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $b = 3,76\,93\,77\,13.. \times 14,46 = 54,5$ mm

---

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "ℓ".

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell} = 0.70\,71\,06\,78\ldots\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $d_4 = 0.70\,71\,06\,78\ldots \times 14,46 = 10,2$ mm

---

Radio "d_6" de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_6 = \ell}$$

Radio "d_{10}" de la circunferencia circunscrita a una

Lámina 44	Poliedros arquimedianos Arquimediano XII	Hoja nº 8

decagonal de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell} = 1,61\,80\,33\,99\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $d_{10} = 1.61\,80\,33\,99\ldots \times 14,46 = 23,4$ mm.

Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2-(d_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{31+12\sqrt{5}}}{2}\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{31+12\sqrt{5}}{4} - \frac{2}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{29+12\sqrt{5}}{4}} \times \ell = \boxed{\frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}}{2}\,\ell}^{\,*} = 3,73\,60\,67\,98\ldots\,\ell = \boxed{\frac{2\sqrt{5}+3}{2}\,\ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $c_4 = 3,73\,60\,67\,98\ldots \times 14,46 = 54,0$ mm

Radio "c_6" de la esfera tangente a las caras exagonales de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_6} = \sqrt{a^2-(d_6)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{31+12\sqrt{5}}}{2}\ell\right)^2 - \ell^2} = \sqrt{\frac{31+12\sqrt{5}}{4} - 1} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{27+12\sqrt{5}}{4}} \times \ell = \frac{\sqrt{27+12\sqrt{5}}}{2} \times \ell = \frac{\sqrt{3(9+4\sqrt{5})}}{2} \times \ell = \frac{\sqrt{3} \times \left(\sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}}\right)}{2} \times \ell$$

* continúa el cálculo en el reverso

[signature]		9 - 5 - 73

UNE A4 210 X 297

$$* \ \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}}{2}\ell = \frac{\sqrt{\frac{29+11}{2}} + \sqrt{\frac{29-11}{2}}}{2}\ell = \frac{\sqrt{20}+\sqrt{9}}{2}\ell = \frac{2\sqrt{5}+3}{2}\ell$$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2\right)}{2} \cdot \ell = \boxed{\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{2} \cdot \ell} = 3{,}66\ 85\ 42\ 49 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $C_6 = 3{,}66\ 85\ 42\ 49 \ldots \times 14{,}46 = 53{,}0$ mm

---

Radio "C_{10}" de la esfera tangente a las caras decagonales de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{C_{10}} = \sqrt{a^2 - (d_{10})^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{31+12\sqrt{5}}}{2}\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{31+12\sqrt{5}}{4} - \frac{6+2\sqrt{5}}{4}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}}{4}} \cdot \ell = \boxed{\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2} \cdot \ell} =$$

$$= 3{,}44\ 09\ 54\ 80 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $C_{10} = 3{,}44\ 09\ 54\ 80 \ldots \times 14{,}46 = 49{,}8$ mm

---

Angulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33)

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_4} = \frac{2\,C_4}{\sqrt{4\,(d_4)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}}{2}\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}}{\sqrt{4 \times \frac{1}{2} - 1}} = \sqrt{29+12\sqrt{5}} \overset{*}{=}$$

* ver mayor simplificación en el reverso

*

$$\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{29+11}{2}} + \sqrt{\frac{29-11}{2}} = \sqrt{20} + \sqrt{9} =$$

$$= \boxed{2\sqrt{5} + 3}$$

$= 7,47\ 21\ 35\ 96 \ldots$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_4 = 0,87\ 34\ 44\ 2$ $\qquad \boxed{\alpha_4 = 82^\circ\ 22'\ 38,5''}$

<u>Angulo rectilíneo "α_6" del diedro formado por una cara exagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.</u>

Se obtiene, en función de su tangente, aplicando la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_6} = \frac{2\ c_6}{\sqrt{4\,(d_6)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{3}}{2}\,\ell}{\sqrt{4\,\ell^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{45} + 6}{3} =$$

$$= \frac{3\sqrt{5} + 6}{3} = \sqrt{5} + 2 = 4,23\ 60\ 67\ 98\ .$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_6 = 0,62\ 69\ 62\ 9$ $\qquad \boxed{\alpha_6 = 76^\circ\ 43'\ 2,9''}$

<u>Angulo rectilíneo "α_{10}" del diedro formado por una cara decagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.</u>

Se obtiene, en función de su tangente, aplicando la fórmula general [5] (ver lám. 33)

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_{10}} = \frac{2\ c_{10}}{\sqrt{4\,(d_{10})^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{2}\,\ell}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{\sqrt{4 \times \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - 1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-1} = \sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(25+10\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{25-20}} = \sqrt{\frac{125+50\sqrt{5}-50\sqrt{5}-100}{5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{5}} = \sqrt{5} = 2,23\ 60\ 67\ 98 \ldots$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha_{10} = 0.34\ 94\ 85\ 0 \qquad \boxed{\alpha_{10} = 65^\circ\ 54'\ 18,6''}$$

Angulo rectilíneo "φ_{4-6}" del diedro formado por una cara cuadrada y otra exagonal regular

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{4-6}} = \alpha_4 + \alpha_6 = 82^\circ\ 22'\ 38,5'' + 76^\circ\ 43'\ 2,9'' =$$

$$= \boxed{159^\circ\ 5'\ 41,4''}$$

También puede obtenerse directamente este valor:

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi_{4-6}} = \operatorname{tg}(\alpha_4+\alpha_6) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_4 + \operatorname{tg}\alpha_6}{1-\operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_6} = \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)}{1-\sqrt{29+12\sqrt{5}}\times(\sqrt{5}+2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)}{1-\sqrt{(29+12\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)^2}} = \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)}{1-\sqrt{(29+12\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)}{1-\sqrt{261+108\sqrt{5}+116\sqrt{5}+240}} =$$

$$= \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)}{1-\sqrt{501+224\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)}{1-\left(\sqrt{\frac{501+11}{2}}+\sqrt{\frac{501-11}{2}}\right)} = \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)}{1-\sqrt{256}-\sqrt{245}} =$$

$$= \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)}{1-16-7\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)}{7\sqrt{5}+15} = -\frac{\left[\sqrt{29+12\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+2)\right]\times(7\sqrt{5}-15)}{7^2\times5-15^2} =$$

Lámina 44	Poliedros arquimedianos Arquimediano XII	Hoja nº 12

$$= -\frac{(7\sqrt{5}-15)\times\sqrt{29+12\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+2)(7\sqrt{5}-15)}{20} =$$

$$= -\frac{\sqrt{(29+12\sqrt{5})(7\sqrt{5}-15)^2} + (35+14\sqrt{5}-15\sqrt{5}-30)}{20} =$$

$$= -\frac{\sqrt{(29+12\sqrt{5})(245+225-210\sqrt{5})} + (5-\sqrt{5})}{20} = -\frac{\sqrt{(29+12\sqrt{5})(470-210\sqrt{5})} + (5-\sqrt{5})}{20} =$$

$$= -\frac{\sqrt{10\,(29+12\sqrt{5})(47-21\sqrt{5})} + (5-\sqrt{5})}{20} = -\frac{\sqrt{10(1363+564\sqrt{5}-609\sqrt{5}-1260)} + (5-\sqrt{5})}{20} =$$

$$= -\frac{\sqrt{10\,(103-45\sqrt{5})} + (5-\sqrt{5})}{20} = -\frac{\sqrt{10}\times\left(\sqrt{\frac{103+22}{2}} - \sqrt{\frac{103-22}{2}}\right) + (5-\sqrt{5})}{20} =$$

$$= -\frac{\sqrt{10}\left(\sqrt{\frac{125}{2}} - \sqrt{\frac{81}{2}}\right) + (5-\sqrt{5})}{20} = -\frac{\sqrt{\frac{1250}{2}} - \sqrt{\frac{810}{2}} + 5-\sqrt{5}}{20} =$$

$$= -\frac{\sqrt{625} - \sqrt{405} + 5-\sqrt{5}}{20} = -\frac{25-9\sqrt{5}+5-\sqrt{5}}{20} = -\frac{30-10\sqrt{5}}{20} =$$

$$= \boxed{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,^{*} = -0,38\,19\,66\,01\ldots$$

y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{4-6}$, será $\operatorname{tg}\alpha_0 = -\operatorname{tg}\varphi_{4-6} =$

$$= -\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,38\,19\,66\,01\ldots$$

$\lg \operatorname{tg}\alpha_0 = \bar{1},58\,20\,24\,8$ $\qquad\qquad \alpha_0 = 20^\circ\,54'\,18{,}6''$

y finalmente $\boxed{\varphi_{4-6}} = 180^\circ - 20^\circ\,54'\,18{,}6'' = \boxed{159^\circ\,5'\,41{,}4''}$

* Ver simplificación en el reverso

[signature]		10 - 4 - 73

* El valor obtenido se hubiese hallado más fácilmente utilizando el más simplificado de

$$\boxed{tg\ \alpha_4} = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} = \boxed{2\sqrt{5} + 3}$$

que se detalla al dorso de la hoja 9.

—

Los cálculos, menos laboriosos, hubiesen sido:

$$\boxed{tg\ \varphi_{4-6}} = tg\,(\alpha_4 + \alpha_6) = \frac{tg\,\alpha_4 + tg\,\alpha_6}{1 - tg\,\alpha_4\ tg\,\alpha} = \frac{(2\sqrt{5}+3) + (\sqrt{5}+2)}{1 - (2\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}+2)} =$$

$$= \frac{3\sqrt{5} + 5}{1 - (10 + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 6)} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{1 - (16 + 7\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{-15 - 7\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5} + 5}{7\sqrt{5} + 15} =$$

$$= -\frac{(3\sqrt{5} + 5)(7\sqrt{5} - 15)}{49 \times 5 - 15^2} = -\frac{21 \times 5 + 35\sqrt{5} - 45\sqrt{5} - 75}{20} = -\frac{30 - 10\sqrt{5}}{20} =$$

$$= \boxed{-\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

valor coincidente con el calculado anteriormente.

Angulo rectilíneo "φ_{4-8}" del diedro formado por una cara cuadrada y otra octogonal

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{4-10}} = \alpha_4 + \alpha_{10} = 82^\circ\ 22'\ 38{,}5'' + 65^\circ\ 54'\ 18{,}6'' =$$

$$= \boxed{148^\circ\ 16'\ 57{,}7''}$$

Puede obtenerse directamente, así:

$$\boxed{tg\ \varphi_{4-10}} = tg\left(\alpha_4 + \alpha_{10}\right) = \frac{tg\ \alpha_4 + tg\ \alpha_{10}}{1 - tg\ \alpha_4 \times tg\ \alpha_{10}} = \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}} + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{29+12\sqrt{5}} \times \sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}} + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5(29+12\sqrt{5})}} = \frac{\left(\sqrt{29+12\sqrt{5}} + \sqrt{5}\right)\left(1 + \sqrt{5(29+12\sqrt{5})}\right)}{1 - 5(29+12\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{5}(29+12\sqrt{5}) + 5\sqrt{29+12\sqrt{5}}}{1 - 145 - 60\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{29+12\sqrt{5}} + \sqrt{5}(30+12\sqrt{5})}{-144-60\sqrt{5}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}} + \sqrt{5}(5+2\sqrt{5})}{24+10\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}} + (5\sqrt{5}+10)}{2(12+5\sqrt{5})} =$$

$$= -\frac{\left[\sqrt{29+12\sqrt{5}} + 5(\sqrt{5}+2)\right] \times (12-5\sqrt{5})}{2(12^2 - 5^2 \times 5)} = -\frac{\sqrt{(29+12\sqrt{5})(12-5\sqrt{5})^2} + 5(\sqrt{5}+2)(12-5\sqrt{5})}{2 \times 19} =$$

$$= -\frac{\sqrt{(29+12\sqrt{5})(144+125-120\sqrt{5})} + 5(12\sqrt{5}+24-25-10\sqrt{5})}{2 \times 19} =$$

$$= -\frac{\sqrt{(29+12\sqrt{5})(269-120\sqrt{5})} + 5(2\sqrt{5}-1)}{2 \times 19} =$$

$$= -\frac{\sqrt{29\times 269 + 12\times 269\sqrt{5} - 29\times 120\sqrt{5} - 60\times 120} + 5(2\sqrt{5}-1)}{2\times 19} =$$

$$= -\frac{\sqrt{601 - 252\sqrt{5}} + 5(2\sqrt{5}-1)}{2\times 19} = -\frac{\sqrt{\frac{601+209}{2}} - \sqrt{\frac{601-209}{2}} + 10\sqrt{5} - 5}{2\times 19} =$$

$$= -\frac{\sqrt{405} - \sqrt{196} + 10\sqrt{5} - 5}{2\times 19} = -\frac{9\sqrt{5} - 14 + 10\sqrt{5} - 5}{2\times 19} = -\frac{19\sqrt{5} - 19}{2\times 19} =$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{*} = -0{,}61\ 80\ 33\ 99\ldots$$

y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{4\text{-}10}$, será: $\operatorname{tg}\alpha_0 = -\operatorname{tg}\varphi_{4\text{-}10} =$

$$= -\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61\ 80\ 33\ 99\ldots$$

$\lg \operatorname{tg}.\ \alpha_0 = \bar{1},79\ 10\ 12\ 4 \qquad \alpha_0 = 31^\circ\ 43'\ 2{,}9''$

y finalmente: $\boxed{\varphi_{4\text{-}10}} = 180^\circ - 31^\circ\ 43'\ 2{,}9'' = \boxed{148^\circ\ 16'\ 57{,}7''}$

valor coincidente con el calculado anteriormente.

<u>Angulo rectilíneo "$\varphi_{6\text{-}10}$" del diedro formado por una cara exagonal y otra octogonal.</u>

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{6\text{-}10}} = \alpha_6 + \alpha_{10} = 76^\circ\ 43'\ 2{,}9'' + 65^\circ\ 54'\ 18{,}6'' =$$

$$= \boxed{142^\circ\ 37'\ 21{,}5''}$$

* Ver simplificación en el reverso

* El valor obtenido se hubiese hallado más fácilmente, utilizando el más simplificado de

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} + 3$$

que se detalla al dorso de la hoja 9.

Los cálculos, menos laboriosos, hubieran sido:

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi_{4-10}} = \operatorname{tg}(\alpha_4 + \alpha_{10}) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_4 + \operatorname{tg}\alpha_{10}}{1 - \operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_{10}} = \frac{(2\sqrt{5}+3) + \sqrt{5}}{1-(2\sqrt{5}+3)(\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{3\sqrt{5}+3}{1-(10+3\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{5}+3}{-9-3\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}+3}{9+3\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}+1}{3+\sqrt{5}} = -\frac{(\sqrt{5}+1)(3-\sqrt{5})}{4} =$$

$$= -\frac{3\sqrt{5}+3-5-\sqrt{5}}{4} = -\frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \boxed{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Puede obtenerse directamente, así:

$$\boxed{tg\ \varphi_{6-10}} = tg\left(\alpha_6 + \alpha_{10}\right) = \frac{tg\ \alpha_6 + tg\ \alpha_{10}}{1 - tg\ \alpha_6 \times tg\ \alpha_{10}} = \frac{(\sqrt{5}+2)+\sqrt{5}}{1-(\sqrt{5}+2)\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{1-(5+2\sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{-4-2\sqrt{5}} = -\frac{2(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+2)} = -\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-2)}{1} =$$

$$= -\left(5+\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2\right) = \boxed{-\left(3-\sqrt{5}\right)} = -0,76\ 39\ 32\ 02 \ldots$$

haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{6-10}$, será $tg\ \alpha_0 = -tg\ \varphi_{6-10} =$

$$= -\left(-(3-\sqrt{5})\right) = 3-\sqrt{5} = 0,76\ 39\ 32\ 02 \ldots$$

$$lg\ tg\ \alpha_0 = \bar{1},88\ 30\ 54\ 8 \qquad \alpha_0 = 37^\circ\ 22'\ 38,5''$$

y finalmente $\boxed{\varphi_{6-10}} = 180^\circ - 37^\circ\ 22'\ 38,5'' = \boxed{142^\circ\ 37'\ 21,5''}$

valor coincidente con el ya calculado anteriormente.

<u>Area lateral "S" del arquimediano</u>

Se compone de la suma de 30 caras cuadradas, 20 exagonales y 12 decagonales

La apotema de la cara exagonal, será: (ver lám. 42, h 9)

$$\text{apotema } P_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ l$$

La apotema de la cara decagonal, será: (ver lám. 41, h 12)

$$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l$$

y el área lateral S

$$\boxed{S} = 30\, l^2 + 20 \times \frac{6}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\, l^2 + 12 \times \frac{10}{2} \times \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l^2 =$$

$$= \left(30 + 30\sqrt{3} + 30\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right) l^2 = \boxed{30\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right) l^2} =$$

$$= 174{,}29\ 20\ 30\ 20 \ldots\, l^2$$

<u>Volumen "V" del arquimediano</u>

Se compone de la suma de 30 pirámides regulares de base cuadrada y altura "C_4"; de 20 pirámides exagonales de altura "C_6" y de 12 decagonales de altura "C_{10}". Su volumen será pues:

$$\boxed{V} = 30\, l^2 \times \frac{2\sqrt{5}+3}{2\times 3}\, l + 30\sqrt{3}\, l^2 \times \frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{2\times 3}\, l + 30\sqrt{5+2\sqrt{5}}\, l^2 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2\times 3}\, l =$$

$$= \left[5\left(2\sqrt{5}+3\right) + 5\sqrt{3}\left(\sqrt{15}+2\sqrt{3}\right) + 5\sqrt{5+2\sqrt{5}} \times \sqrt{25+10\sqrt{5}}\right] l^3 =$$

$$= \left[10\sqrt{5} + 15 + 5\left(\sqrt{45}+6\right) + 5\sqrt{\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(25+10\sqrt{5}\right)}\right] l^3 =$$

$$= \left(10\sqrt{5} + 15 + 5\times 3\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{125+50\sqrt{5}+50\sqrt{5}+100}\right) l^3 =$$

$$= \left(25\sqrt{5} + 45 + 5\sqrt{225+100\sqrt{5}}\right) l^3 = \left(25\sqrt{5} + 45 + 5\sqrt{25\left(9+4\sqrt{5}\right)}\right) l^3 =$$

$$= \left(25\sqrt{5} + 45 + 25\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right) l^3 = \left[25\sqrt{5} + 45 + 25\left(\sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}}\right)\right] l^3 =$$

$$= \left(25\sqrt{5} + 45 + 25\sqrt{5} + 50\right) l^3 = \left(50\sqrt{5} + 95\right) l^3 = \boxed{5\left(19 + 10\sqrt{5}\right) l^3} =$$

$$= 206,80\,33\,98\,88\ldots\ l^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 30 cuadrados de lado $l = 14.5$ mm; de 20 exágonos y 12 decágonos, también regulares y de igual lado. El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran un cuadrado, un exágono y un decágono

---

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

Lámina 44	Poliedros arquimedianos Arquimediano XII	Hoja nº 18

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{31 + 12\sqrt{5}}}{2}\,\ell$	$3.80\ 23\ 95 \ldots \ell$
b	$\frac{\sqrt{30 + 12\sqrt{5}}}{2}\,\ell$	$3.76\ 93\ 77 \ldots \ell$
c_4	$\frac{2\sqrt{5} + 3}{2}\,\ell$	$3,73\ 60\ 68 \ldots \ell$
c_6	$\frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{3}}{2}\,\ell$	$3,66\ 85\ 42 \ldots \ell$
c_{10}	$\frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{2}\,\ell$	$3,44\ 09\ 55 \ldots \ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$	$0,70\ 71\ 07 \ldots \ell$
d_6	$1\ \ell$	$1,00\ 00\ 00 \ldots \ell$
d_{10}	$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\,\ell$	$1,61\ 80\ 34 \ldots \ell$
m	$\sqrt{\frac{6(35 + 2\sqrt{5})}{241}}\,\ell$	$0,99\ 13\ 16 \ldots \ell$
α_4	$tg\ \alpha_4 = 2\sqrt{5} + 3$	$tg\ \alpha_4 = 7,47\ 21\ 36 \ldots$ $\alpha_4 = 82^\circ\ 22'\ 38,5''$
α_6	$tg\ \alpha_6 = \sqrt{5} + 2$	$tg\ \alpha_6 = 4,23\ 60\ 68 \ldots$ $\alpha_6 = 76^\circ\ 43'\ 2,9''$
α_{10}	$tg\ \alpha_{10} = \sqrt{5}$	$tg\ \alpha_{10} = 2,23\ 60\ 68 \ldots$ $\alpha_{10} = 65^\circ\ 54'\ 18,6''$
φ_{4-6}	$tg\ \varphi_{4-6} = -\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$	$tg\ \varphi_{4-6} = -0.38\ 19\ 66 \ldots$ $\varphi_{4-6} = 159^\circ\ 5'\ 41,4''$
φ_{4-10}	$tg\ \varphi_{4-10} = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$	$tg.\ \varphi_{4-10} = -0,61\ 80\ 34 \ldots$ $\varphi_{4-10} = 148^\circ\ 16'\ 57,1''$
φ_{6-10}	$tg\ \varphi_{6-10} = -(3 - \sqrt{5})$	$tg\ \varphi_{6-10} = -0,76\ 39\ 32$ $\varphi_{6-10} = 142^\circ\ 37'\ 21,5''$
S	$30\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right)\ell^2$	$174,29\ 20\ 30 \ldots \ell^2$
V	$5(19 + 10\sqrt{5})\,\ell^3$	$206,80\ 33\ 99 \ldots \ell^3$

14-5-73

Lámina 44	Poliedros arquimedianos Arquimediano XII	Hoja nº 19

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 44, a la representación gráfica del Arquimediano XII.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias, cuyo cálculo efectuaremos posteriormente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado "l_{XII}" del arquimediano, cuya longitud es de 14.46 mm.

Con este objeto, calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{XII} = Dato del ejercicio = 14.5 mm

a = 3.80 23 95... × 14.46 = 55.0 mm

b = 3.76 93 77... × 14.46 = 54.5 mm

c_4 = 3.73 60 68... × 14.46 = 54.0 mm

c_6 = 3.66 85 42... × 14.46 = 53.0 mm

c_{10} = 3.44 09 55... × 14.46 = 49.8 mm

d_4 = 0.70 71 07... × 14.46 = 10.2 mm

d_6 = 1.00 00 00... × 14.46 = 14.5 mm

d_{10} = 1.61 80 34... × 14.46 = 23.4 mm

Antes de proceder al trazado gráfico, observemos en la lámina 44 que la proyección del arquimediano en el plano II, presenta una forma muy regular, debido a la posición elegida en su representación. Esta regularidad nos permite el trazado previo y directo de dicha pro-

16-5-73

yección, la cual nos facilitará la obtención de las proyecciones I y III, según veremos a continuación.

Teniendo presente lo expuesto, el orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 44), es el siguiente:

1º Situar el centro O, de coordenadas O (72, 72, 85) mm

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio 55 mm.

3º Comenzar el trazado de la proyección II, dividiendo previamente con gran exactitud y a partir de A, la circunferencia proyección de la esfera inscrita, en 10 partes iguales. (Ver nota al dorso)

4º Unir los puntos de división con el centro

5º Trazar paralelas a ambos lados de los radios anteriores a distancias iguales a la mitad del lado "l_{XII}" del arquimediano. Sobre estas rectas están las proyecciones de "todos" los vértices del arquimediano. Para determinarlos, deberán trazarse circunferencias concéntricas con la exterior y sucesivamente con los siguientes radios

a) Radio "d_{10}"

b) Radio "r_1"

c) Radio "r_2"

d) Radio "r_3"

UNE A 4-210 x 297

NOTA .- El tomar el punto A como origen de división, tiene como consecuencia el conseguir que la cara decagonal superior 1 al 10, la adyacente cuadrada 5-6-16-17 por su parte izquierda, y la adyacente exagonal 1-10-11-22-23-12 por su derecha, queden todas con sus planos perpendiculares a I, con lo cual los diedros correspondientes se obtienen en I en su verdadera magnitud.

Igualmente ocurre en la parte inferior de la figura

e) Radio "r_4"

f) Radio "r_5"

Los valores analíticos de estos radios los determinaremos posteriormente. Obsérvese que el radio "r_5" es ligeramente inferior al "a" de la esfera circunscrita, por lo que prácticamente se confunden ambas circunferencias.

6º Obtenida la proyección total en II del arquimediano, la determinación de la I y III es inmediata. Para ello, tracemos en ambas, paralelas al eje +X, equidistantes del centro y con las sucesivas distancias, previamente calculadas, "f_1", "f_2", "f_3", "f_4" y "f_5", sobre las que se encontrarán las proyecciones de todos sus vértices, en correspondencia con las ya obtenidas en II.

Como comprobación y necesaria ayuda para el trazado gráfico dado anteriormente, vamos a determinar analíticamente las siguientes magnitudes complementarias que darán mayor exactitud a dicho trazado.

Apotema "k_6" de una cara exagonal

Se demuestra en Geometría, es (ver lám. 42, 49)

$$\boxed{k_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell} = 0{,}86\ 60\ 25\ 4\ldots\ \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $k_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14{,}46 = 12{,}5$ mm

UNE A 4-210 x 297

19 - 5 - 73

Apotema "k_{10}" de una cara decagonal

Se demuestra en Geometría, es (ver lám. 41, h 12)

$$\boxed{k_{10} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell} = 1,53\ 88\ 41\ 76\ldots\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $k_{10} = 1{,}53\ 88\ 42\ldots \times 14{,}46 = 22{,}3$ mm

---

Distancia "g_1" de los vértices 11 al 20 al plano de la cara decagonal 1 al 10, y de los vértices 101 al 110 al de la cara decagonal 111 al 120 *

Considerando en I la cara decagonal 1 al 10 y la contigua cuadrada 5-6-17-16 por su parte izquierda, que forman entre sí el ángulo φ_{4-10}, ya conocido, siendo sus respectivos planos perpendiculares a I, se deduce que la altura "g_1" buscada es la proyección sobre III del eje de la cara cuadrada, siendo el ángulo de proyección:

$\varphi_{4-10} - 90° = 148°\ 16'\ 57{,}1'' - 90° = 58°\ 16'\ 57{,}1''$ de donde

$$g_1 = \cos 58°\ 16'\ 57{,}1'' \times \ell = 0{,}52\ 57\ 37\ 1\ldots\ \ell$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$\lg \cos 58°\ 16'\ 57{,}1'' = \bar{1},72\ 07\ 63\ 7\ldots = \lg 0{,}52\ 57\ 31\ 1\ldots$

$$\boxed{\cos 58°\ 16'\ 57{,}1'' = 0{,}52\ 57\ 31\ 1\ldots}$$

* Ver cálculo igual en lám. 38, hojas 19 a 22

19 - 5 - 73

UNE A 4-210 x 297

El valor anterior puede ser obtenido más exactamente, mediante el cálculo trigonométrico de los ángulos que intervienen, cuyos valores hemos deducido anteriormente. Su desarrollo es el siguiente:

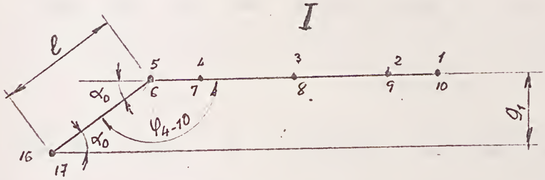


Figura 2

Sea (fig. 2) la proyección parcial en I del Arquimediano XII, que comprenda la cara decagonal 1 al 10 y la contigua cuadrada (por la parte izquierda) 5-6-17-16, que forman entre sí el ángulo φ_{4-10}, siendo α_0 el ángulo suplementario del mismo. La magnitud de la cota "g_1" buscada, será pues

$$g_1 = l \operatorname{sen} \alpha_0 \qquad [1]$$

pero siendo $\operatorname{tg} \varphi_{4-10} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, será $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y por lo tanto

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_0}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{1+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2 \times 2}{5-\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(6-2\sqrt{5}) \times 2}{5-\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5}) \times 4}{5-\sqrt{5}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{20}} = \sqrt{\frac{15-5\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{20}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

valor que sustituido en [1], nos da

$$\boxed{g_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times l} = 0{,}52\ 57\ 31\ 1\ldots\ l$$

cuyo valor numérico aproximado es coincidente con el obtenido anteriormente.

Para el caso del dibujo, será: $g_1 = 0{,}52\ 57\ 31\ 1\ldots \times 14{,}46 = 7{,}6$ mm

---

Si en lugar de considerar la cara izquierda cuadrada, 5-6-17-16 contigua a la decagonal 1 al 10, hubiésemos partido en el cálculo, de la exagonal derecha 1-10-11-22-23-12, situada en las mismas condiciones que la cuadrada, hubiésemos llegado al mismo resultado, según se detalla a continuación:

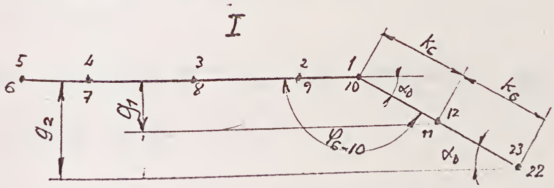


Figura 3

En la figura 3; hemos representado la cara decagonal superior 1 al 10 y la exagonal contigua derecha 1-10-11-22-23-12 que forman entre sí el ángulo φ_{6-10}, conocido. La magnitud "g_1" se obtiene ahora como proyección sobre III de la apotema "k_6" de la cara exagonal de lado "l".

Por consiguiente, tendremos

$$g_1 = k_6 \operatorname{sen} \alpha_0 \qquad [2]$$

siendo $\operatorname{tg} \varphi_{6-10} = -(3-\sqrt{5})$, será $\operatorname{tg} \alpha_0 = 3-\sqrt{5}$ y por lo

tanto $\quad \operatorname{sen} \alpha_0 = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_0}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{1+(3-\sqrt{5})^2}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{1+(9+5-6\sqrt{5})}} =$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{15-6\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{15-6\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{14-6\sqrt{5}}{15-6\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{2(7-3\sqrt{5})(15+6\sqrt{5})}{225-180}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(105-45\sqrt{5}+42\sqrt{5}-90)}{45}} = \sqrt{\frac{2(15-3\sqrt{5})}{45}} = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{15}}$$

y siendo $K_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} l$ (ver pág. 21), tendremos, sustituyendo valores en [2]

$$\boxed{g_1} = K_6 \operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{15}} \times l = \sqrt{\frac{3 \times 2\,(5-\sqrt{5})}{4 \times 15}}\; l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l} = 0{,}52\,57\,31\,11 \ldots l$$

valor coincidente con el obtenido con la cara cuadrada (parte izquierda).

NOTA.- Obsérvese que el valor de "g_2", que calcularemos posteriormente seguido de los de "g_3" a "g_5", se obtiene de inmediato del cálculo anterior, ya que en la figura 2, se deduce que

$$g_2 = 2\, K_6 \operatorname{sen} \alpha_0 = 2 g_1 = 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\; l = 1{,}05\,14\,62\,2 \ldots l$$

Los resultados anteriores nos demuestran que los vértices 11 al 20 están en un mismo plano

Lámina 44	Poliedros arquimedianos Arquimediano XII	Hoja nº nº 26

<u>Distancia "f_1" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 11 al 20 y 101 al 110, respectivamente.</u>

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_{10}" y "g_1", ya calculadas.

$$\boxed{f_1} = 2\,(c_{10} - g_1) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{2} - \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right) l =$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{2} - \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right)^2} \times l = 2\sqrt{\frac{25+10\sqrt5}{4} + \frac{5-\sqrt5}{10} - 2\times\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{2}\times\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{125+50\sqrt5+10-2\sqrt5}{20} - \sqrt{\frac{(5-\sqrt5)(25+10\sqrt5)}{10}}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{135+48\sqrt5}{20} - \sqrt{\frac{125-25\sqrt5+50\sqrt5-50}{10}}} \times l = 2\sqrt{\frac{135+48\sqrt5}{20} - \sqrt{\frac{75+25\sqrt5}{10}}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{135+48\sqrt5}{20} - \frac{5}{\sqrt{10}}\times\sqrt{3+\sqrt5}} \times l = 2\sqrt{\frac{135+48\sqrt5}{20} - \frac{5}{\sqrt{10}}\times\left(\sqrt{\frac52}+\sqrt{\frac12}\right)} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{135+48\sqrt5}{20} - 5\left(\sqrt{\frac{5}{20}}+\sqrt{\frac{1}{20}}\right)} \times l = 2\sqrt{\frac{135+48\sqrt5}{20} - \frac52 - 5\times\sqrt{\frac{1}{20}}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{135+48\sqrt5}{20} - \frac52 - \frac{\sqrt5}{2}} \times l = 2\sqrt{\frac{135+48\sqrt5-50-10\sqrt5}{20}} \times l =$$

$$= 2\times\sqrt{\frac{85+38\sqrt5}{20}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{85+38\sqrt5}{5}} \times l} = 5,83\,04\,47\,38\ldots\, l$$

Para el caso del dibujo, será: <u>$f_1 = 5,83\,04\,47\,38\ldots \times 14,46$</u> $= 84,3$ mm

20 - 5 - 73

Radio "r_1" de las circunferencias que contienen a los vértices 11 al 20 y 101 al 110 respectivamente

Este radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_1}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_1} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{31+12\sqrt{5}}}{2}\,l\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{85+38\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1}{2}l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{31+12\sqrt{5}}{4} - \frac{85+38\sqrt{5}}{5\times 4}} \times l = \sqrt{\frac{155+60\sqrt{5}-85-38\sqrt{5}}{20}}\,l = \sqrt{\frac{70+22\sqrt{5}}{20}} \times l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{35+11\sqrt{5}}{10}}\,l} = 2,44\,12\,44\,51\ldots\, l$$

Para el caso del dibujo, será: $r_1 = 2,44\,12\,44\,51\ldots \times 14,46 = 35,3$ mm

---

Distancia "g_2" de los vértices 21 al 30 al plano de la cara decagonal 1 al 10, y de los vértices 91 al 100 a la cara decagonal 111 al 120:

Refiriéndonos a la lámina 44, vemos que la cara decagonal 16-17-28-39-50-51-60-49-38-27, contigua a la cuadrada 5-6-17-16, están ambas proyectadas sobre I, según líneas rectas, por ser sus respectivos planos perpendiculares a I, y por lo tanto la arista común 16-17, intersección de dichas caras, será a su vez perpendicular a I.

En la figura 4, representamos el contorno del arqui-

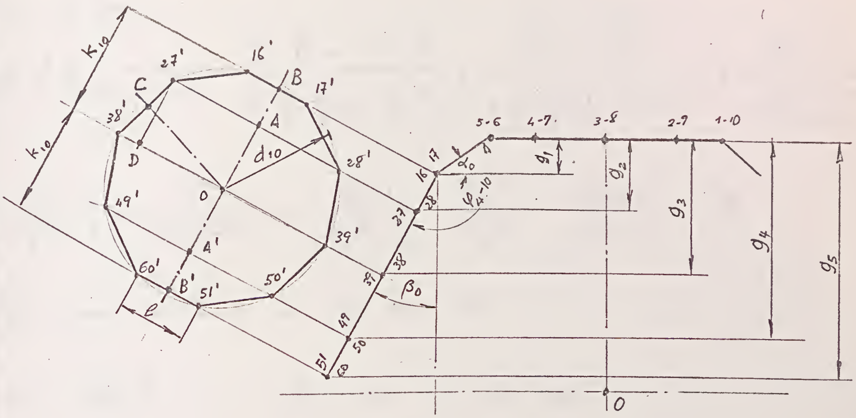


Figura 4

mediano en dicha zona, que incluye la representada en la figura 3. La cara cuadrada 5-6-17-16, tiene contigua la decagonal superior 1 al 10, paralela a II y la también decagonal 16-17-28-39-50-51-60-49-38-27, oblicua a II; esta última la hemos representado también abatida sobre el plano del dibujo (parte izquierda de la figura).

De la figura se deduce:

$$\varphi_{4-10} - \alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \beta_0 \qquad [1]$$

siendo "β_0" el ángulo de proyección sobre III, de la mencionada cara decagonal oblicua.

De la [1] se deduce:

$$tg\left(\varphi_{4-10} - \alpha_0\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} + \beta_0\right) = -ctg\,\beta_0 \qquad [2]$$

pero ya hemos deducido en el cálculo de "g_1" que

$tg\,\varphi_{4-10} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y también $tg\,\alpha_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

por lo que

$$\operatorname{tg}\left(\varphi_{4-10}-\alpha_0\right)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_{4-10}-\operatorname{tg}\alpha_0}{1+\operatorname{tg}\varphi_{4-10}\times\operatorname{tg}\alpha_0}=\frac{-\frac{\sqrt5-1}{2}-\frac{\sqrt5-1}{2}}{1+\left(-\frac{\sqrt5-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)}=\frac{-(\sqrt5-1)}{1-\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt5-1}{\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^2-1}=\frac{\sqrt5-1}{\frac{5+1-2\sqrt5}{4}-1}=\frac{\sqrt5-1}{\frac{3-\sqrt5}{2}-1}=\frac{\sqrt5-1}{\frac{1-\sqrt5}{2}}=\frac{2(\sqrt5-1)}{-(\sqrt5-1)}=-2$$

valor que sustituido en [2] nos da

$$-2=-\operatorname{ctg}\beta_0 \quad \text{..} \quad \operatorname{ctg}\beta_0=2 \quad \text{y de aquí:}$$

$$\operatorname{tg}\beta_0=\frac{1}{2} \qquad [3]$$

de esta última se deduce:

$$\boxed{\cos\beta_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta_0}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=\frac{2}{\sqrt5}=\boxed{\frac{2\sqrt5}{5}} \qquad [4]$$

Por otra parte, si en la cara decagonal abatida de la figura 44, trazamos por "O" la perpendicular al lado 38'-27', y por 27' la perpendicular al radio O-38', se nos formarán dos triángulos rectángulos O-C-38' y 27'-D-38' que son semejantes (tienen un ángulo agudo común), por lo que se verificará que

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{O\text{-}38'}}=\frac{\overline{27'\text{-}D}}{\overline{27'\text{-}38'}}, \quad \text{de donde} \quad \overline{27'\text{-}D}=\boxed{\overline{AO}}=\frac{(\overline{27'\text{-}38'})\times\overline{OC}}{\overline{O\text{-}38'}}=$$

$$=\frac{\ell\times k_{10}}{d_{10}}=\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt5}}{2}\ell:\frac{\sqrt5+1}{2}\ell\right)\times\ell=\frac{\sqrt{5+2\sqrt5}}{\sqrt5+1}\ell=\frac{\sqrt{5+2\sqrt5}\times(\sqrt5-1)}{4}\ell=$$

$$= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}}{4}\, l = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{16}}\, l = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{8}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{8}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\, l}$$

De la figura 4, se deduce que

$$\boxed{\overline{BA}} = \overline{BO} - \overline{AO} = k_{10} - \overline{AO} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\, l}$$

(ver desarrollo del cálculo anterior en lám. 41, hojas 21 y 22)

De la misma figura 4, se deduce también que

$$\boxed{\overline{BA'}} = \overline{BO} + \overline{AO} = k_{10} + \overline{AO} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}}\, l}$$

(ver desarrollo del cálculo anterior en lám. 41, hoja 22)

Con los resultados anteriores, podemos obtener los valores siguientes:

$$g_2 = g_1 + \overline{BA} \cos\beta_0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\, l \qquad [5]$$

$$g_3 = g_1 + \overline{BO} \cos\beta_0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l + \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\, l \qquad [6]$$

$$g_4 = g_1 + \overline{BA'} \cos\beta_0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l + \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\, l \qquad [7]$$

$$g_5 = g_1 + \overline{BB'} \cos\beta_0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l + 2 \times \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\, l \qquad [8]$$

El desarrollo de estos cálculos lo haremos progresivamente, comenzando por el de "g_2".

23 - 5 - 73

Según la fórmula [5] de la página anterior, tendremos:

$$\boxed{g_2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,.\,l + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\, l = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l + \sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})}{8\times 5}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, l = 1{,}05\ 14\ 62\ 2\ldots\, l$$

NOTA.- Obsérvese que el valor obtenido para "g_2", es coincidente con el ya calculado por diferente camino, en la página nº 25.

Para el caso del dibujo, será: $g_2 = 1{,}05\ 14\ 62\ 2.. \times 14{,}46 = 15{,}2$ m m.

Distancia "f_2" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 21 al 30 y 91 al 100 respectivamente

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_{10}" y "g_2", ya calculadas.

$$\boxed{f_2} = 2\,(c_{10} - g_2) = 2\times\left[\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2}\, l - \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, l\right] =$$

$$= \left(\sqrt{25+10\sqrt{5}} - 2\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\right) l = \sqrt{\left(\sqrt{25+10\sqrt{5}} - 2\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\right)^2} \times l =$$

$$= \sqrt{(25+10\sqrt{5}) + 4\times\frac{10-2\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{(25+10\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{5}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{125+50\sqrt{5}+40-8\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{250+100\sqrt{5}-50\sqrt{5}-100}{5}}} \times l =$$

UNE A 4·210 x 297

Lámina 44	Poliedros arquimedianos Arquimediano XII	Hoja n° 32

$$= \sqrt{\frac{165 + 42\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{150 + 50\sqrt{5}}{5}}} \times l = \sqrt{\frac{165 + 42\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{30 + 10\sqrt{5}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{165 + 42\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{10} \times \sqrt{3 + \sqrt{5}}} \times l = \sqrt{\frac{165 + 42\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{10}\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{165 + 42\sqrt{5}}{4} - 4\sqrt{\frac{50}{2}} - 4\sqrt{\frac{10}{2}}} \times l = \sqrt{\frac{165 + 42\sqrt{5}}{5} - 20 - 4\sqrt{5}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{165 + 42\sqrt{5} - 100 - 20\sqrt{5}}{5}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{65 + 22\sqrt{5}}{5}}\ l} = 4,77\,89\,85\,15 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $f_2 = 4,77\,89\,85\,15 \ldots \times 14,46 = 69,1$ mm

---

Radio "r_2" de las circunferencias que contienen a los vértices 21 al 30 y 91 al 100 respectivamente

Este radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_2}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{31 + 12\sqrt{5}}}{2}\ l\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{65 + 22\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1}{2}\ l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{31 + 12\sqrt{5}}{4} - \frac{65 + 22\sqrt{5}}{20}} \times l = \sqrt{\frac{155 + 60\sqrt{5} - 65 - 22\sqrt{5}}{20}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{90 + 38\sqrt{5}}{20}}\ l = \boxed{\sqrt{\frac{45 + 19\sqrt{5}}{10}} \times l} = 2,95\,77\,91\,26 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $r_2 = 2,95\,77\,91\,26 \ldots \times 14,46 = 42,8$ mm

---

24 - 5 - 73

Distancia "g_3" de los vértices 31 al 40 al plano de la cara decagonal 1 al 10, y de los vértices 81 al 90 a la cara decagonal 111 al 120.

En la página 30 hemos deducido este valor (ver fórm. [6]), que simplificamos seguidamente.

$$\boxed{g_3} = \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\,\ell + \frac{\sqrt{5+2\sqrt5}}{2} \times \frac{2\sqrt5}{5}\,\ell = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}} + \frac{\sqrt{5(5+2\sqrt5)}}{5}\right)\ell =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}\right)\ell = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}\right)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10} + \frac{5+2\sqrt5}{5} + 2\sqrt{\frac{(5-\sqrt5)(5+2\sqrt5)}{50}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt5+10+4\sqrt5}{10} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25-5\sqrt5+10\sqrt5-10}{2}}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{15+5\sqrt5}{2}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \frac{2\sqrt5}{5\sqrt2} \times \sqrt{3+\sqrt5}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \frac{2\sqrt5}{5\sqrt2} \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{4}}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} + \frac{2\sqrt5}{10}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt5}{10} + \frac{10}{10} + \frac{2\sqrt5}{10}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+3\sqrt5+10+2\sqrt5}{10}} \times \ell = \sqrt{\frac{25+5\sqrt5}{10}} \times \ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}} \times \ell} = 1,90\,21\,13\,03\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $g_3 = 1.90\,21\,13\,03\ldots \times 14.46 = 27.5$ mm

---

UNE A 4-210 x 297

Distancia "f_3" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 31 al 40 y 81 al 90 respectivamente.

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_{10}" y "g_3" ya calculadas.

$$\boxed{f_3} = 2\left(c_{10} - g_3\right) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right) l = \left(\sqrt{25+10\sqrt{5}} - \sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right) l =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{25+10\sqrt{5}} - \sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right)^2} \times l = \sqrt{25+10\sqrt{5} + 2(5+\sqrt{5}) - 2\sqrt{(25+10\sqrt{5})(5+\sqrt{5})\times 2}}\; l =$$

$$= \sqrt{25+10\sqrt{5} + 10 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2(125+50\sqrt{5}+25\sqrt{5}+50)}} \times l =$$

$$= \sqrt{35+12\sqrt{5} - 2\sqrt{2(175+75\sqrt{5})}} \times l = \sqrt{35+12\sqrt{5} - 2\sqrt{2\times 25\times(7+3\sqrt{5})}} \times l =$$

$$= \sqrt{35+12\sqrt{5} - 10\sqrt{2}\times\sqrt{7+3\sqrt{5}}} \times l = \sqrt{35+12\sqrt{5} - 10\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{35+12\sqrt{5} - 10\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + \sqrt{\frac{10}{2}}\right)} \times l = \sqrt{35+12\sqrt{5} - 10\times 3 - 10\sqrt{5}} \times l = \boxed{\sqrt{5+2\sqrt{5}}\; l} =$$

$$= 3{,}07\,76\,83\,53\ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $f_3 = 3{,}07\,76\,83\,53\ldots \times 14{,}46 = 44{,}5$ mm

---

Radio "r_3" de las circunferencias que contienen a los vértices 31 al 40 y 81 al 90 respectivamente.

Este radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "f_3". Su valor será:

Lámina 44	Poliedros arquimedianos Arquimediano XII	Hoja nº 35

$$\boxed{r_3} = \sqrt{a^2-\left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{31+12\sqrt5}}{2}\,\ell\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt5}}{2}\,\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{31+12\sqrt5}{4}-\frac{5+2\sqrt5}{4}}\;\ell = \sqrt{\frac{31+12\sqrt5-5-2\sqrt5}{4}}\cdot\ell = \sqrt{\frac{26+10\sqrt5}{4}}\;\ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{13+5\sqrt5}{2}}\;\ell} = 3,47\,70\,92\,17\ldots\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $3,47\,70\,92\,17\ldots \times 14,46 = 50,3$ mm.

<u>Distancia "g_4" de los vértices 41 al 50 al plano de la cara decagonal 1 al 10, y de los vértices 71 al 80 a la cara decagonal 111 al 120</u>

En la página 30 hemos deducido este valor (ver fórmula [7]), que simplificamos seguidamente.

$$\boxed{g_4} = \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\;\ell + \sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{8}}\times\frac{2\sqrt5}{5}\;\ell = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{125+55\sqrt5}{8}}\right)\ell =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(25+11\sqrt5)}{2}}\right)\ell = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}+\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{10}}\right)\ell =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}+\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{10}}\right)^2}\cdot\ell = \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}+\frac{25+11\sqrt5}{10}+2\sqrt{\frac{(5-\sqrt5)(25+11\sqrt5)}{10^2}}}\times\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{30+10\sqrt5}{10}-\frac{2}{10}\sqrt{125-25\sqrt5+55\sqrt5-55}}\times\ell = \sqrt{3+\sqrt5+\frac{1}{5}\sqrt{70+30\sqrt5}}\times\ell =$$

$$= \sqrt{3+\sqrt5+\frac{\sqrt{10}}{5}\times\sqrt{7+3\sqrt5}}\times\ell = \sqrt{3+\sqrt5+\frac{\sqrt{10}}{5}\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}\times\ell =$$

$$= \sqrt{3+\sqrt5+\frac{1}{5}\times\sqrt{\frac{90}{2}}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{50}{2}}}\times\ell = \sqrt{3+\sqrt5+\frac{3\sqrt5}{5}+1}\times\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5}{5}}\, l = \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{5}} \times l = \boxed{2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\, l} =$$

$$= 2{,}75\ 27\ 63\ 84 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $g_4 = 2{,}75\ 27\ 63\ 84 \ldots \times 14{,}46 = 39{,}8$ m m.

Distancia "f_4" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 41 al 50 y 71 al 80 respectivamente.

Se obtiene por diferencia de las alturas "C_{10}" y "g_4", ya calculadas.

$$\boxed{f_4} = 2\left(C_{10} - g_4\right) = 2\left(\frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{2} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\right) l =$$

$$= \left(\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} - 4\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\right) l = \left(\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} - 4\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\right) l =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{25(5+2\sqrt{5})}{5}} - 4\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right) l = \left(5\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 4\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right) \cdot l = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l} =$$

$$= 1{,}37\ 63\ 81\ 92 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $f_4 = 1{,}37\ 63\ 81\ 92 \ldots \times 14{,}46 =$

Radio "r_4" de las circunferencias que contienen a los vértices 41 al 50 y 71 al 80 respectivamente

Este radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "f_4". Su valor

UNE A 4-210 x 297

será: $$\boxed{r_4} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{F_4}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{31+12\sqrt5}}{2}\,\ell\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}\,\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{31+12\sqrt5}{4} - \frac{1}{4}\times\frac{5+2\sqrt5}{5}}\times\ell = \sqrt{\frac{155+60\sqrt5-5-2\sqrt5}{20}}\cdot\ell = \sqrt{\frac{150+58\sqrt5}{20}}\,\ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{75+29\sqrt5}{10}}\,\ell} = 3{,}73\ 95\ 98\ 53\ldots\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $r_4 = 3{,}73\ 95\ 98\ 53\ldots \times 14{,}46 = 54{,}1$ mm

---

<u>Distancia "g_5" de los vértices 51 al 60 al plano de la cara decagonal 1 al 10, y de los vértices 61 al 70 a la cara decagonal 111 al 120.</u>

En la página 30 hemos deducido este valor (ver fórmula [83]), que simplificamos seguidamente.

$$\boxed{g_5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\,\ell + 2\times\frac{\sqrt{5+2\sqrt5}}{2}\times\frac{2\sqrt5}{5}\,\ell = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}} + \sqrt{\frac{(5+2\sqrt5)\times2^2\times5}{5^2}}\right)\ell =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}} + \sqrt{\frac{4(5+2\sqrt5)}{5}}\right)\ell = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}} + \sqrt{\frac{4(5+2\sqrt5)}{5}}\right)^2}\times\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10} + \frac{4(5+2\sqrt5)}{5} + 2\sqrt{\frac{4(5+2\sqrt5)(5-\sqrt5)}{50}}}\,\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt5+40+16\sqrt5}{10} + \frac{2}{5}\sqrt{2(25+10\sqrt5-5\sqrt5-10)}}\times\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{45+15\sqrt5}{10} + \frac{2}{5}\sqrt{2(15+5\sqrt5)}}\times\ell = \sqrt{\frac{9+3\sqrt5}{2} + \frac{2}{5}\sqrt{10(3+\sqrt5)}}\times\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3\sqrt5}{2} + \frac{2}{5}\sqrt{10}\times\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\times\ell = \sqrt{\frac{9+3\sqrt5}{2} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{2}} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{10}{2}}}\times\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2} + 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} \times l = \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}+20+4\sqrt{5}}{10}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{65+19\sqrt{5}}{10}} \times l} =$$

$$= 3.\ 27\ 84\ 94\ 95\ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $g_5 = 3,\ 37\ 84\ 94\ 95\ldots \times 14,46 = 47,4$ mm

---

Distancia "f_5" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 51 al 60 y 61 al 70 respectivamente.

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_{10}" y "g_5", ya calculadas.

$$\boxed{f_5} = 2\left(C_{10} - g_5\right) = 2\left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2} - \sqrt{\frac{65+19\sqrt{5}}{10}}\right) l =$$

$$= \left(\sqrt{25+10\sqrt{5}} - 2\sqrt{\frac{65+19\sqrt{5}}{10}}\right) l = \sqrt{\left(\sqrt{25+10\sqrt{5}} - 2\sqrt{\frac{65+19\sqrt{5}}{10}}\right)^2} \times l =$$

$$= \sqrt{25+10\sqrt{5} + 4\times\frac{65+19\sqrt{5}}{10} - 4\sqrt{\frac{(25+10\sqrt{5})(65+19\sqrt{5})}{10}}} \times l$$

$$= \sqrt{25+10\sqrt{5} + \frac{130+38\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{1625+650\sqrt{5}+475\sqrt{5}+950}{10}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{125+50\sqrt{5}+130+38\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{2575+1125\sqrt{5}}{10}}} \times l = \sqrt{\frac{255+88\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{515+225}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{255+88\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{5(103+45\sqrt{5})}{2}}} \times l = \sqrt{\frac{255+88\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{103+45\sqrt{5}}} \times l$$

$$= \sqrt{\frac{255+88\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{\frac{103+22}{2}} + \sqrt{\frac{103-22}{2}}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{255+88\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{\frac{125}{2}} - 4\sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{\frac{81}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{255+88\sqrt{5}}{5} - 4\sqrt{\frac{125\times 5}{2\times 2}} - 4\sqrt{\frac{81\times 5}{2\times 2}}} \times l = \sqrt{\frac{255+88\sqrt{5}}{2} - 50 - 18\sqrt{5}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{255+88\sqrt{5}-250-90\sqrt{5}}{5}} \cdot l = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, l} = 0,32\,49\,19\,70\ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $f_5 = 0,32\,49\,19\,7.. \times 14,46 = 4,7$ mm

---

<u>Distancia "r_5" de las circunferencias que contienen a los vértices 51 al 60 y 61 al 70 respectivamente.</u>

Este radio es un cateto de un Triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "f_5". Su valor será

$$\boxed{r_5} = \sqrt{a^2-\left(\frac{f_5}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{31+12\sqrt{5}}{2}\,l\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\,l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{31+12\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}\times\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \cdot l = \sqrt{\frac{155+60\sqrt{5}-5+2\sqrt{5}}{20}} \cdot l = \sqrt{\frac{150+62\sqrt{5}}{20}}\, l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{75+31\sqrt{5}}{10}} \cdot l} = 3,79\,89\,22\,31\ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $r_5 = 3,79\,89\,22\,31\ldots \times 14,46 = 54,9$ mm

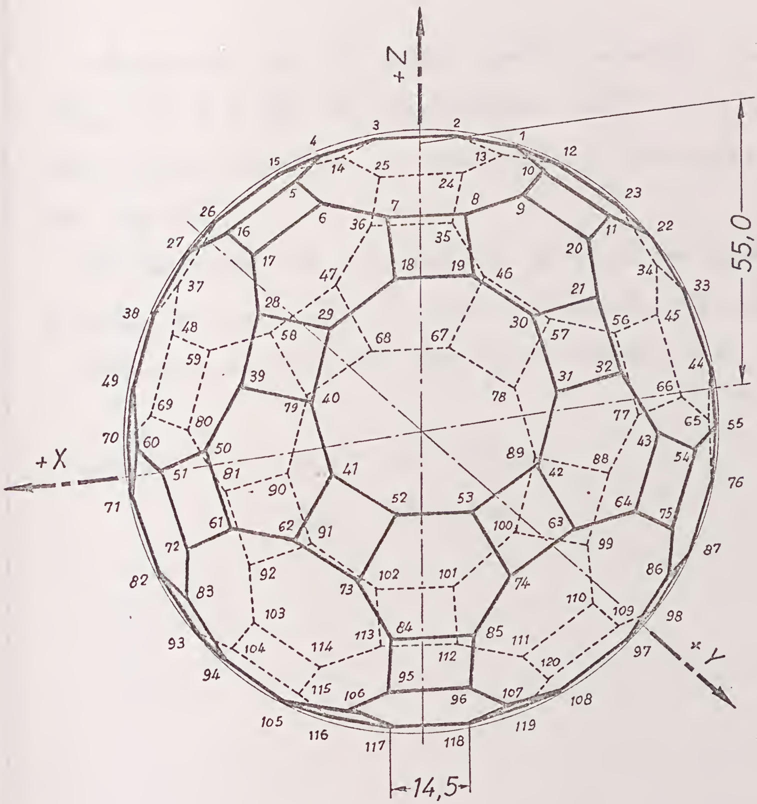
(prácticamente este radio es igual al de la esfera circunscrita al arquimediano)

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados de los valores complementarios deducidos.

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
k_6	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$	$0,86\ 60\ 25\ldots\ \ell$
k_{10}	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell$	$1,53\ 88\ 42\ldots\ \ell$
f_1	$\sqrt{\frac{85+38\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$5.83\ 04\ 47\ldots\ \ell$
f_2	$\sqrt{\frac{65+22\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$4,77\ 89\ 85\ldots\ \ell$
f_3	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\ell$	$3,07\ 76\ 84\ldots\ \ell$
f_4	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$1,37\ 63\ 82\ldots\ \ell$
f_5	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$0,32\ 49\ 20\ldots\ \ell$
g_1	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,52\ 57\ 31\ldots\ \ell$
g_2	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$1,05\ 14\ 62\ldots\ \ell$
g_3	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,\ell$	$1.90\ 21\ 13\ldots\ \ell$
g_4	$2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$2.75\ 27\ 64\ldots\ \ell$
g_5	$\sqrt{\frac{65+19\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$3,27\ 84\ 95\ldots\ \ell$
r_1	$\sqrt{\frac{35+11\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$2,44\ 12\ 45\ldots\ \ell$
r_2	$\sqrt{\frac{45+19\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$2,95\ 77\ 91\ldots\ \ell$
r_3	$\sqrt{\frac{13+5\sqrt{5}}{2}}\,\ell$	$3,47\ 70\ 92\ldots\ \ell$
r_4	$\sqrt{\frac{75+29\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$3,73\ 95\ 99\ldots\ \ell$
r_5	$\sqrt{\frac{75+31\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$3.79\ 89\ 22\ldots\ \ell$

29-5-73



Arquimediano XII

Lámina 45	Poliedros arquimediano Arquimediano XIII $(1 P_5 + 2 P_6)$	45

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano XIII, en el que en cada vértice concurren un pentágono y dos exágonos, todos regulares.

La longitud de su lado es de 22,2 mm, y las coordenadas de su centro 0, son: 0 (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

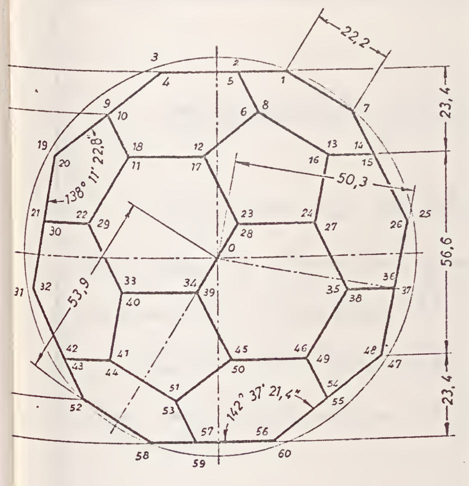
DATOS: 0 (72, 72, 85) mm

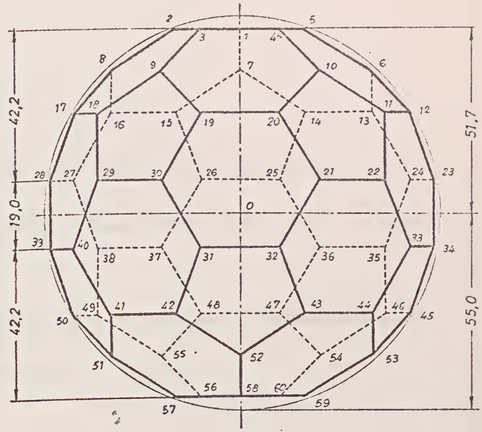
l_{XIII} = 22,2 mm

29 - 5 - 73

I

III

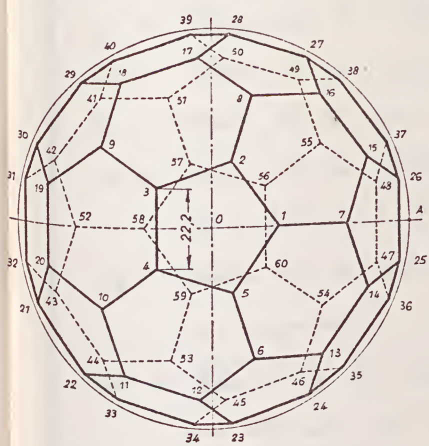




+X

O

+Y



ARQUIMEDIANO XIII

Número de caras pentagonales	C_5 = 12
Número de caras exagonales	C_6 = 20
Número de vértices	V = 60
Número de aristas	A = 90
Número de caras de un ángulo sólido	$1 P_5 + 2 P_6$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III el Arquimediano XIII, en el que en cada vértice concurren un pentágono y dos exágonos regulares.

La longitud de su lado es de 22,2 mm y las coordenadas de su centro O, son O(72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano XIII					Lámina 45 / Curso 19 - 19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del Arquimediano XIII (dato del ejercicio)

a = Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_5 = Radio de la esfera tangente a las caras pentagonales

c_6 = Radio de la esfera tangente a las caras exagonales

d_5 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal

d_6 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_5 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

α_6 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una

UNE A 4-210 x 297

29-5-73

cara exagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

φ_{5-6} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara pentagonal y otra exagonal.

φ_{6-6} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras exagonales.

S = Superficie

V = Volumen.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 12 caras pentagonales y 20 caras exagonales; 60 vértices y 90 aristas.

En cada vértice concurren un pentágono y dos exágonos, todos regulares y de igual lado "l".

Así pues, tendremos que:

$$\boxed{\text{ARQUIMEDIANO } \underline{\text{XIII}} \quad (1P_5 + 2P_6);\; C_5 = 12;\; C_6 = 20;\; V = 60;\; A = 90}$$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las tres aristas que concurren en un ángulo sólido.

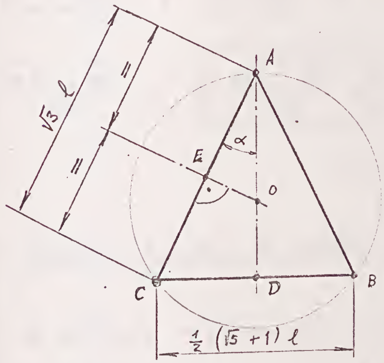


Figura 1

Dicho polígono (fig. 1) es un triángulo isósceles, cuya base BC es la diagonal de una cara pentagonal, y sus otros dos lados iguales AC = AB, corresponden a la diagonal de una cara exagonal.

Se demuestra en Geometría que la diagonal de un pentágono regular, en función de su lado "ℓ", es

$$\overline{CB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\,\ell$$

y la de un exágono regular, también de lado "ℓ", es.

$$\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{3}\,\ell$$

De la figura se deduce:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{(\sqrt{3}\,\ell)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,\ell\right)^2} = \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}\cdot \ell =$$

$$= \sqrt{3 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}}\cdot \ell = \sqrt{\frac{48-6-2\sqrt{5}}{16}}\,\ell = \sqrt{\frac{42-2\sqrt{5}}{16}}\,\ell = \sqrt{\frac{21-\sqrt{5}}{8}}\,\ell$$

por lo que será: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \sqrt{\dfrac{21-\sqrt{5}}{8}}\,\ell : \sqrt{3}\,\ell = \sqrt{\dfrac{21-\sqrt{5}}{24}}$

y en consecuencia:

$$\overline{AO} = \boxed{m} = \frac{\overline{AE}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \ell : \sqrt{\frac{21-\sqrt{5}}{24}} = \sqrt{\frac{3}{4} : \frac{21-\sqrt{5}}{24}}\; \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{3 \times 24}{4(21-\sqrt{5})}}\; \ell = \sqrt{\frac{3 \times 6}{21-\sqrt{5}}}\; \ell = \sqrt{\frac{18\,(21+\sqrt{5})}{21^2 - 5}}\; \ell = \sqrt{\frac{18\,(21+\sqrt{5})}{436}}\; \ell$$

$$= \sqrt{\frac{9\,(21+\sqrt{5})}{218}}\; \ell = \boxed{3 \times \sqrt{\frac{21+\sqrt{5}}{218}}\; \ell} = 0{,}97\,94\,32\,08 \ldots \ell$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33)

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{9(21+\sqrt{5})}{218}}} \times \ell = \frac{1}{2\sqrt{\frac{218 - 189 - 9\sqrt{5}}{218}}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{29 - 9\sqrt{5}}{218}}} \times \ell = \frac{1}{\sqrt{\frac{4(29-9\sqrt{5})}{218}}}\; \ell = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\,(29-9\sqrt{5})}{109}}} \times \ell = \sqrt{\frac{109}{2(29-9\sqrt{5})}}\; \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{109\,(29+9\sqrt{5})}{2 \times (29^2 - 9^2 \times 5)}} \times \ell = \sqrt{\frac{109\,(29+9\sqrt{5})}{2 \times 436}} \times \ell = \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{2 \times 4}} \times \ell = \boxed{\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}}\; \ell} =$$

$$= 2{,}47\,80\,18\,66 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $a = 55$ mm $\qquad \ell = 22{,}195$ mm.

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Se obtiene aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33)

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}}\,\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}-2}{8}} \times \ell = \sqrt{\frac{27+9\sqrt{5}}{8}} \times \ell = \sqrt{\frac{9(3+\sqrt{5})}{8}} \times \ell = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \times \ell =$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\,\ell = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\,\ell = \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\ell = \frac{3}{2} \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\ell =$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{5}}{4}+\frac{3}{4}\right)\ell = \boxed{\frac{3(\sqrt{5}+1)}{4} \times \ell} = 2,42\ 70\ 50\ 98\ldots\ \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $b = 2,42\ 70\ 50\ 98\ldots \times 22,195 = 53,9$ mm

---

Radio "d_5" de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell} = 0,85\ 06\ 50\ 8\ldots\ \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $d_5 = 0,85\ 06\ 50\ 8\ldots \times 22,195 = 18,9$ mm

---

Radio "d_6" de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_6 = \ell}$$

Radio "c_5" de la esfera tangente a las caras pentagonales de lado "ℓ"

Se obtiene aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_5} = \sqrt{a^2 - (d_5)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}}\,\ell\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8} - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \ell = \sqrt{\frac{145+45\sqrt{5}-20-4\sqrt{5}}{40}} \times \ell = \boxed{\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}} \times \ell} =$$

$$= 2,32\,74\,38\,44\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $c_5 = 2,32\,74\,38\,44\ldots \times 22,195 = 51,7$ mm

---

Radio "c_6" de la esfera tangente a las caras escagonales de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_6} = \sqrt{a^2 - (d_6)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}}\,\ell\right)^2 - \ell^2} = \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8} - 1} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}-8}{8}}\,\ell = \sqrt{\frac{21+9\sqrt{5}}{8}} \times \ell = \sqrt{\frac{3(7+3\sqrt{5})}{8}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{8}} \times \sqrt{7+3\sqrt{5}} \times \ell = \sqrt{\frac{3}{8}} \times \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\ell = \left(\sqrt{\frac{27}{16}} + \sqrt{\frac{15}{16}}\right)\ell =$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}\right)\ell = \boxed{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}\,\ell} = 2,26\,72.83\,94\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $C_6 = 2,26\ 72\ 83\ 94... \times 22,195 = 50,3$ mm

---

Angulo rectilíneo "α_5" del diedro formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_5} = \frac{2\ C_5}{\sqrt{4\left(d_5\right)^2 - \ell^2}} = \frac{2\sqrt{\frac{125+41\sqrt5}{40}}\ \ell}{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\ \ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{\frac{125+41\sqrt5}{10}}}{\sqrt{4\times\frac{5+\sqrt5}{10} - 1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{125+41\sqrt5}{10}}}{\sqrt{\frac{20+4\sqrt5}{10} - 1}} = \frac{\sqrt{\frac{125+41\sqrt5}{10}}}{\sqrt{\frac{10+4\sqrt5}{10}}} = \sqrt{\frac{125+41\sqrt5}{10} : \frac{10+4\sqrt5}{10}} = \sqrt{\frac{125+41\sqrt5}{10+4\sqrt5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(125+41\sqrt5)(5-2\sqrt5)}{2\times(25-20)}} = \sqrt{\frac{625+205\sqrt5-250\sqrt5-410}{10}} = \sqrt{\frac{215-45\sqrt5}{10}} =$$

$$= \sqrt{\frac{43-9\sqrt5}{2}} = \frac{\sqrt{43-9\sqrt5}}{\sqrt2} = \frac{\sqrt{\frac{43+38}{2}} - \sqrt{\frac{43-38}{2}}}{\sqrt2} = \frac{\sqrt{\frac{81}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt2} =$$

$$= \sqrt{\frac{81}{4}} - \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt5}{2} = \boxed{\frac{9-\sqrt5}{2}} = 3,38\ 19\ 66\ 01...\ \ell$$

$lg.\ tg\ \alpha_5 = 0,52\ 91\ 69\ 2$ $\qquad \boxed{\alpha_5 = 73^\circ\ 31'\ 40,0''}$

Angulo rectilíneo "α_6" del diedro formado por una cara

exagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{tg \cdot \alpha_6} = \frac{2\, C_6}{\sqrt{4(d_6)^2 - l^2}} = \frac{2 \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4}\, l}{\sqrt{4(l)^2 - l^2}} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = \frac{9 + \sqrt{45}}{6} =$$

$$= \frac{9 + 3\sqrt{5}}{6} = \boxed{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = 2,61\ 80\ 33\ 99 \ldots$$

$$lg\ tg\ \alpha_6 = 0,41\ 79\ 75\ 2 \qquad \boxed{\alpha_6 = 69^\circ\ 5'\ 41,4''}$$

Angulo rectilíneo "φ_{5-6}" del diedro formado por una cara pentagonal y otra exagonal, ambas regulares.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{5-6}} = \alpha_5 + \alpha_6 = 73^\circ\ 31'\ 40,0'' + 69^\circ\ 5'\ 41,4''$$

$$= \boxed{142^\circ\ 37'\ 21,4''}$$

También puede obtenerse directamente, así:

$$\boxed{tg\ \varphi_{5-6}} = tg\,(\alpha_5 + tg\,\alpha_6) = \frac{tg\,\alpha_5 + tg\,\alpha_6}{1 - tg\,\alpha_5 \cdot tg\,\alpha_6} =$$

$$= \frac{\frac{9-\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right) \times \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{6}{1 - \frac{27 - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - 5}{4}} = \frac{6}{1 - \frac{22 + 6\sqrt{5}}{4}} =$$

UNE A 4:210 x 297

$$= \frac{6}{1 - \frac{11 + 3\sqrt{5}}{2}} = \frac{12}{2 - 11 - 3\sqrt{5}} = -\frac{12}{9 + 3\sqrt{5}} = -\frac{4}{3 + \sqrt{5}} = -\frac{4(3 - \sqrt{5})}{4} =$$

$= \boxed{-(3 - \sqrt{5})}$ y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{5-6}$, será:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\operatorname{tg} \varphi_{5-6} = -\left(-(3 - \sqrt{5})\right) = 3 - \sqrt{5} = 0{,}76\ 39\ 32\ 02 \ldots$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_0 = \bar{1},88\ 30\ 55\ 3$ $\qquad \alpha_0 = 37^\circ\ 22'\ 38{,}6''$

por lo que será:

$$\boxed{\varphi_{5-6}} = 180^\circ - 37^\circ\ 22'\ 38{,}6'' = \boxed{142^\circ\ 37'\ 21{,}4''}$$

valor coincidente con el anterior calculado

<u>Angulo rectilíneo "φ_{6-6}" del diedro formado por dos caras exagonales regulares.</u>

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{6-6}} = \alpha_6 + \alpha_6 = 2\,\alpha_6 = 2 \times (69^\circ\ 5'\ 41{,}4'') =$$

$$= \boxed{138^\circ\ 11'\ 22{,}8''}$$

También puede obtenerse directamente así:

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi_{6-6}} = \operatorname{tg} 2\alpha_6 = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_6}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_6} = \frac{2 \times \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 - \frac{9 + 5 + 6\sqrt{5}}{4}} =$$

$$= \frac{3 + \sqrt{5}}{1 - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{-5 - 3\sqrt{5}} = -\frac{2(3 + \sqrt{5})}{3\sqrt{5} + 5} = -\frac{2(3 + \sqrt{5})(3\sqrt{5} - 5)}{20} =$$

UNE A 4.210 x 297

1 - 6 - 73

$$= -\frac{9\sqrt{5}+15-15-5\sqrt{5}}{10} = -\frac{4\sqrt{5}}{10} = \boxed{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = -0,89\ 44\ 27\ 19\ldots$$

y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{6-6}$, será:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\operatorname{tg}\varphi_{6-6} = -\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,89\ 44\ 27\ 19\ldots$$

$$\lg \operatorname{tg}\alpha_0 = \bar{1},95\ 15\ 45\ 0 \qquad \alpha_0 = 41^\circ\ 48'\ 37,2''$$

por lo que será:

$$\boxed{\varphi_{6-6}} = 180^\circ - 41^\circ\ 48'\ 37,2'' = \boxed{138^\circ\ 11'\ 22,8''}$$

valor coincidente con el anterior calculado

Área lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 12 caras pentagonales y 20 exagonales regulares, todas de lado "ℓ".

La apotema de una cara pentagonal es $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell$, y la una cara exagonal es $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$, según se demuestra en Geometría. El área total valdrá pues

$$\boxed{S} = 12 \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \ell^2 + 20 \times \frac{6}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell^2 = \left(30\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + 30\sqrt{3}\right)\ell^2 =$$

$$= \boxed{30\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{3}\right)\ell^2} = 77,\ 48\ 10\ 48\ 30\ldots\ \ell^2$$

Volumen "V" del arquimediano

UNE A 4.210 x 297

Se compone de la suma de 12 pirámides regulares, de base pentagonal y altura "C_5", y de 20 pirámides regulares de base escagonal y altura "C_6". Su volumen será pues:

$$\boxed{V} = 12 \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, \ell^2 \times \frac{C_5}{3} + 20 \times \frac{6}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \ell^2 \times \frac{C_6}{3} =$$

$$= 10 \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4} \right) \ell^3 =$$

$$= 10 \left(\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(125+41\sqrt{5})}{400}} + \frac{9+\sqrt{45}}{4} \right) \ell^3 = 10 \left(\frac{\sqrt{625+125\sqrt{5}+205\sqrt{5}+205}}{20} + \right.$$

$$\left. + \frac{9+3\sqrt{5}}{4} \right) \ell^3 = 10 \left(\frac{\sqrt{830+330\sqrt{5}}}{20} + \frac{9+3\sqrt{5}}{4} \right) \ell^3 = 10 \left(\frac{\sqrt{10} \times \sqrt{83+33\sqrt{5}}}{20} + \frac{9+3\sqrt{5}}{4} \right) \ell^3 =$$

$$= 10 \left(\frac{\sqrt{10} \times \left(\sqrt{\frac{83+38}{2}} + \sqrt{\frac{83-38}{2}} \right)}{20} + \frac{9+3\sqrt{5}}{4} \right) \ell^3 = 10 \left(\frac{\sqrt{\frac{1210}{2}} + \sqrt{\frac{450}{2}}}{20} + \frac{9+3\sqrt{5}}{4} \right) \ell^3 =$$

$$= 10 \left(\frac{\sqrt{605} + \sqrt{225}}{20} + \frac{9+3\sqrt{5}}{4} \right) \ell^3 = 10 \left(\frac{11\sqrt{5}+15}{20} + \frac{9+3\sqrt{5}}{4} \right) \ell^3 =$$

$$= 10 \left(\frac{11\sqrt{5}+15+45+15\sqrt{5}}{20} \right) \ell^3 = \left(\frac{26\sqrt{5}+60}{2} \right) \ell^3 = \boxed{\left(13\sqrt{5}+30\right) \ell^3} =$$

$$= 59,06\ 88\ 83\ 71 \ldots \ell^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 12 pentágonos regulares de lado "$\ell = 22,2$ mm" y 20 escágonos regulares de igual lado. El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran un pentágono y dos escágonos.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, se resumen los resultados analíticos obtenidos anteriormente

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}}\ \ell$	$2,47\,80\,19\ldots\ \ell$
b	$\frac{3(\sqrt{5}+1)}{4}\ \ell$	$2,42\,70\,51\ldots\ \ell$
c_5	$\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}}\ \ell$	$2,32\,74\,38\ldots\ \ell$
c_6	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}\ \ell$	$2.26\,72\,84\ldots\ \ell$
d_5	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$0,85\,06\,51\ldots\ \ell$
d_6	$1\ \ell$	$1{\cdot}00\,00\,00\ldots\ \ell$
m	$3\cdot\sqrt{\frac{21+\sqrt{5}}{218}}\ \ell$	$0,97\,94\,32\ldots\ \ell$
α_5	$tg\ \alpha_5 = \frac{9-\sqrt{5}}{2}$	$tg.\ \alpha_5 = 3.38\,19\,66\ldots$ $\alpha_5 = 73^\circ\ 31'\ 40.0''$
α_6	$tg\ \alpha_6 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$tg\ \alpha_6 = 2.61\,80\,34\ldots$ $\alpha_6 = 69^\circ\ 5'\ 41.4''$
$\varphi_{5\text{-}6}$	$tg\ \varphi_{5\text{-}6} = -(3-\sqrt{5})$	$tg\ \varphi_{5\text{-}6} = -0,76\,39\,32$ $\varphi_{5\text{-}6} = 142^\circ\ 37'\ 21.4''$
$\varphi_{6\text{-}6}$	$tg\ \varphi_{6\text{-}6} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$tg\ \varphi_{6\text{-}6} = -0.89\,44\,27\ldots$ $\varphi_{6\text{-}6} = 138^\circ\ 11'\ 22.8''$
S	$30\cdot\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}+\sqrt{3}\right)\ \ell^2$	$77,48\,10\,48\ldots\ \ell^2$
V	$(13\sqrt{5}+30)\ \ell^3$	$59,06\,88\,84\ldots\ \ell^3$

PROCESO GRÁFICO - ANALITICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 45, a la representación gráfica del Arquimediano XIII.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias, cuyo cálculo efectuaremos posteriormente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado "l_{XIII}" del arquimediano, cuya longitud es de 22,195 mm.

Con este objeto, calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{XIII} = Dato del ejercicio = 22,2 mm

a = 2,47 80 19 × 22,195 = 55,0 mm

b = 2,42 70 51 × 22,195 = 53,9 mm

c_5 = 2,32 74 38 × 22,195 = 51,7 mm

c_6 = 2,26 72 84 × 22,195 = 50,3 mm

d_5 = 0,85 06 51 × 22,195 = 18,9 mm

d_6 = 1,00 00 00 × 22,195 = 22,2 mm

Antes de proceder al trazado gráfico, observemos en la lámina 45, que la proyección del arquimediano en el plano II, presenta una forma muy regular, debido a la posición elegida en su representación. Esta regularidad nos permite el trazado previo y directo de dicha pro-

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

yección, lo cual nos facilitará la obtención de las proyecciones en II y III como a continuación veremos.

Teniendo presente lo expuesto, el orden de operaciones del trazado gráfico (lámina 45), es el siguiente:

<u>1º</u> Situar el centro O, de coordenadas O(72, 72, 85) mm.

<u>2º</u> Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita de 55 mm de radio.

<u>3º</u> Comenzar el trazado de la proyección II, dividiendo previamente, con gran exactitud y a partir de A, la circunferia proyección de la esfera inscrita, en 10 partes iguales.*

<u>4º</u> Unir los puntos de división con el centro O.

<u>5º</u> Trazar paralelas a ambos lados de los radios anteriores, a distancias iguales a la mitad del lado "l_{XIII}" del arquimediano. Sobre dichos radios, o sobre sus paralelas se encuentran las proyecciones de "todos" los vértices

*NOTA.- El tomar el punto A como origen de división, tiene por objeto el conseguir que la cara pentagonal superior 1 al 5, la adyacente exagonal 3-9-19-20-10-4 y la exagonal contigua a ésta 19-30-31-32-21-20, ambas en su parte derecha, queden todas perpendiculares a I, con lo cual, los diedros de dichas caras pueden obtenerse directamente en I.

Igualmente ocurre esto con su parte simétrica inferior (simetría de centro O).

del arquimediano. Para determinarlos deberán trazarse circunferencias concéntricas con la exterior y sucesivamente con los siguientes radios:

Vértices 1 al 5 y 56 al 60	Radio "d_5"
Vértices 6 al 10 y 51 al 55	Radio "r_1"
Vértices 11 al 20 y 41 al 50	Radio "r_2"
Vértices 21 al 30 y 31 al 40	Radio "r_3"

Los valores analíticos de estos radios los determinaremos posteriormente.

<u>6º</u> Obtenida la proyección total en II del arquimediano, la determinación de la I y III es inmediata si previamente trazamos en ambas paralelas al eje X, equidistantes del centro O, y a las distancias previamente calculadas "f_1", "f_2" y "f_3" (cuyos valores determinaremos a continuación), sobre las que se encontrarán las proyecciones de todos sus vértices, en correspondencia con las ya obtenidas en II.

Como comprobación y necesaria ayuda para el trazado gráfico dado anteriormente, vamos a determinar analíticamente las siguientes magnitudes complementarias que darán gran exactitud a dicho trazado.

UNE A 4 210 x 297

Apotema "k_6" de una cara exagonal

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{k_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l} = 0,86\,60\,25\,4 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $k_6 = 0,86\,60\,25\,4 \ldots \times 22,195 = 19,2$ mm

---

Distancia "g_1" de los vértices 6 al 10 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 51 al 55 al de la cara pentagonal 56 al 60.

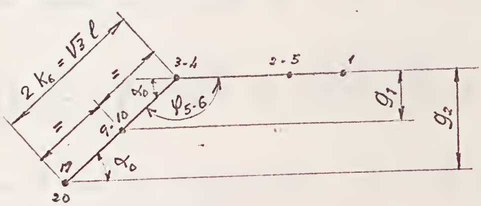


Figura 1

Sea (figura 1) la proyección parcial en I del arquimediano XIII, que comprende la cara pentagonal 1 al 5 y la contigua exagonal (por la parte izquierda) 3-9-19-20-10-4, y que forman entre sí el ángulo conocido φ_{5-6}, siendo α_0 el ángulo suplementario del mismo.

La altura "g_1" buscada es la proyección sobre III de la apotema "k_6" de la cara contigua exagonal 3-9-19-20-10-4.

Su magnitud será pues:

$$g_1 = k_6 \operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \alpha_0 \, l \qquad [1]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Lámina 45	Poliedros arquimedianos Arquimediano XIII	Hoja nº 17

pero siendo $\operatorname{tg} \varphi_{5\text{-}6} = -(3-\sqrt{5})$, será $\operatorname{tg} \alpha_0 = 3-\sqrt{5}$

y por lo tanto

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_0}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{1+(3-\sqrt{5})^2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{1+(9+5-6\sqrt{5})}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{15-6\sqrt{5}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{15-6\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{14-6\sqrt{5}}{15-6\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{2(7-3\sqrt{5})}{3(5-2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{2(7-3\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{3(25-20)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(35-15\sqrt{5}+14\sqrt{5}-30)}{3\times 5}} = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{15}} \qquad [2]$$

valor que sustituido en [1], nos da

$$\boxed{g_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{15}}\, l = \sqrt{\frac{6(5-\sqrt{5})}{4\times 15}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l} = 0{,}52\ 57\ 31\ 11\ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $g_1 = 0{,}52\ 57\ 31\ 11\ldots \times 22{,}195 = 11{,}7$ m m.

Como comprobación numérica del resultado anterior, efectuaremos el siguiente cálculo trigonométrico:

De la fig. 1 se deduce que

$$g_1 = k_6 \cos(\varphi_{5\text{-}6} - 90^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos.(142^\circ\ 37'\ 21{,}4'' - 90^\circ) \times l =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 52^\circ\ 37'\ 21{,}4'' \times l$$ y tomando logaritmos

$$g_1 = 0{,}52\ 57\ 31\text{·}3\ldots l \left\{ \begin{array}{lr} \frac{1}{2}\log.\ 3 = \frac{1}{2}\times 0{,}477\ 12\ 13 = & 0{,}238\ 56\ 07 \\ +\ \lg.\ \cos\ 52^\circ\ 37'\ 21{,}4'' = & \bar{1}{,}78\ 3\ 2\ 332 \\ & 0{,}02\ 17\ 93\ 9 \\ -\ \lg\ 2 = & -\,0{,}30\ 10\ 300 \\ \boxed{\lg\ 0{,}52\ 57\ 313} = & \bar{1}{,}72\ 07\ 639 \end{array} \right.$$

UNE A 4 210 x 297

valor muy aproximado al decimal calculado anteriormente.

<u>Distancia "f_1" entre los dos planos paralelos a Π, que contienen los vértices 6 al 10 y 51 al 55, respectivamente.</u>

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_5" y "g_1", ya calculadas.

$$\boxed{f_1} = 2\,(c_5 - g_1) = 2 \times \left(\sqrt{\frac{125 + 41\sqrt5}{40}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right) l =$$

$$= 2 \times \sqrt{\left(\sqrt{\frac{125+41\sqrt5}{40}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right)^2} \times l = 2 \times \sqrt{\frac{125+41\sqrt5}{40} + \frac{5-\sqrt5}{10} - 2\sqrt{\frac{(125+41\sqrt5)(5-\sqrt5)}{400}}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{125 + 41\sqrt5 + 20 - 4\sqrt5}{40} - 2 \times \frac{\sqrt{625 + 205\sqrt5 - 125\sqrt5 - 205}}{20}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{145 + 37\sqrt5}{40} - \frac{\sqrt{420 + 80\sqrt5}}{10}} \times l = 2\sqrt{\frac{145 + 37\sqrt5}{40} - \frac{\sqrt{20\,(21 + 4\sqrt5)}}{10}} \times l$$

$$2\sqrt{\frac{145 + 37\sqrt5}{40} - \frac{\sqrt{20} \times \left(\sqrt{\frac{21+19}{2}} + \sqrt{\frac{31-19}{2}}\right)}{10}} \times l = 2\sqrt{\frac{145+37\sqrt5}{40} - \frac{\sqrt{20}\left(\sqrt{20}+1\right)}{10}}\; l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{145 + 37\sqrt5}{40} - \frac{20 + 2\sqrt5}{10}} \times l = 2\sqrt{\frac{145 + 37\sqrt5 - 80 - 8\sqrt5}{40}} \times l = 2\sqrt{\frac{65 + 29\sqrt5}{40}}\; l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{65 + 29\sqrt5}{10}} \times l} = 3{,}60\,34\,14\,65 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $f_1 = 3{,}60\,34\,14\,65\ldots \times 22{,}195 = 80{,}0$ mm.

UNE A 4-210 x 297

8 - 6 - 73

Radio "r_1" de las circunferencias que contienen a los vértices 6 al 10 y 51 al 55 respectivamente

Este radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_1}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_1} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}}\, l\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{65+29\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{145+45\sqrt{5}-65-29\sqrt{5}}{40}} \times l = \sqrt{\frac{80+16\sqrt{5}}{40}}\, l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}} \times l} = 1,70\ 13\ 01\ 60 \ldots\, l$$

Para el caso del dibujo, será: $r_1 = 1,70\ 13\ 01\ 60 \ldots \times 22,195 = 37,8$ mm

---

Distancia "g_2" de los vértices 11 al 20 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 41 al 50 a la cara pentagonal 56 al 60.

De la figura 1 se deduce que

$$\boxed{g_2} = 2\, g_1 = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \times l} =$$

$$= 1,05\ 14\ 62\ 22 \ldots\, l$$

Para el caso del dibujo, será: $g_2 = 1,05\ 14\ 62\ 22 \ldots \times 22,195 = 23,3$

Distancia "f_2" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 11 al 20 y 41 al 50 respectivamente.

Se obtiene por diferencia de las alturas "C_5" y "g_2", ya calculadas.

$$\boxed{f_2} = 2\left(C_5 - g_2\right) = 2\times\left(\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}} - \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\right)\times l =$$

$$= 2\times\sqrt{\left(\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}} - \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\right)^2}\times l = 2\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40} + \frac{10-2\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{\frac{(125+41\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{200}}}\times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}+80-16\sqrt{5}}{40} - 2\sqrt{\frac{2\times(625+205\sqrt{5}-125\sqrt{5}-205)}{200}}}\times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{205+25\sqrt{5}}{40} - \frac{2}{10}\sqrt{420+80\sqrt{5}}}\times l = 2\times\sqrt{\frac{41+5\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{5}\sqrt{20(21+4\sqrt{5})}}\times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{41+5\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{5}\sqrt{20}\left(\sqrt{\frac{21+19}{2}} + \sqrt{\frac{21-19}{2}}\right)}\times l = 2\sqrt{\frac{41+5\sqrt{5}}{8} - \frac{\sqrt{20}(\sqrt{20}+1)}{5}}\, l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{41+5\sqrt{5}}{8} - \frac{20+2\sqrt{5}}{5}}\times l = 2\sqrt{\frac{205+25\sqrt{5}-160-16\sqrt{5}}{40}}\times l = \sqrt{\frac{45+9\sqrt{5}}{10}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{9(5+\sqrt{5})}{10}}\, l = \boxed{3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l} = 3d_5 = 2,55195264\ldots l$$

Su valor en el dibujo será: $f_2 = 2.55195264\ldots \times 22.195 = 56.6$ mm

Radio "r_2" de las circunferencias que contienen a los vértices 11 al 20 y 41 al 50 respectivamente

Este radio es un cateto de un triángulo rectángulo

de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_2}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}}\, l\right)^2 - \frac{1}{4}\left(3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8} - \frac{9}{4} \times \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8} - \frac{45+9\sqrt{5}}{40}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{145+45\sqrt{5}-45-9\sqrt{5}}{40}} \times l = \sqrt{\frac{100+36\sqrt{5}}{40}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{25+9\sqrt{5}}{10}} \times l} =$$

$$= 2,12\;42\;55\;11 \ldots\, l$$

Para el caso del dibujo, será: $r_2 = 2,12\;42\;55\;11 \ldots \times 22,195 = 46,7$ mm

---

<u>Distancia "g_3" de los vértices 21 al 30 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 31 al 40 al de la cara pentagonal 56 al 60</u>

Refiriéndonos a la lámina 45, vemos que la cara exagonal : 19 - 30 - 31 - 32 - 21 - 20, contigua a la exagonal 3-9-19-20-10-4 y de arista común 19-20, están las dos proyectadas sobre I según líneas rectas, por ser sus respectivos planos perpendiculares a I, y por lo tanto la arista común 19-20, intersección de dichas caras, será también perpendicular a I.

En la figura 2 representamos el contorno superior izquierdo del arquimediano en dicha zona, que in-

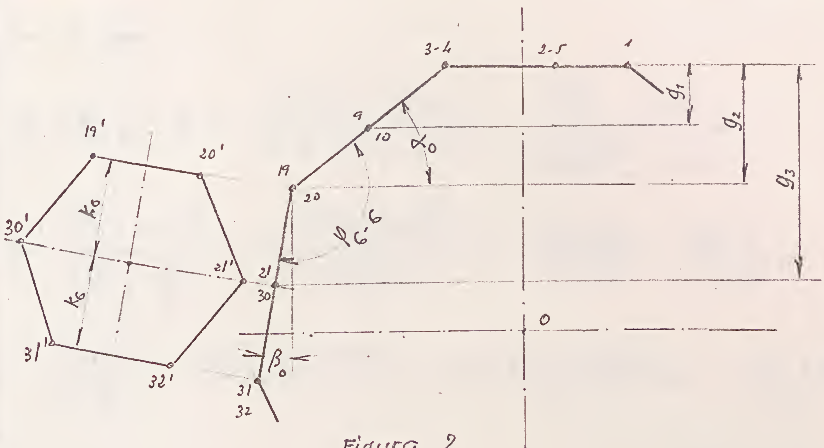


Figura 2

cluye la representada en la figura 1. La cara exagonal 3-9-19-20-10-4, tiene contigua la decagonal superior 1 al 5, paralela a II, y la también exagonal 19-30-31-32-21-20, oblicua a II; esta última la hemos representado también abatida sobre el plano del dibujo (parte izquierda de la figura).

De la figura se deduce:

$$\varphi_{6-6} - \alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \beta_0 \qquad [1]$$

siendo "β_0" el ángulo de proyección sobre III de la mencionada cara decagonal oblicua inferior.

De la [1] se deduce:

$$tg\left(\varphi_{6-6} - \alpha_0\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} + \beta_0\right) = -\,ctg\ \beta_0 \qquad [2]$$

pero ya hemos deducido en el cálculo de "g_1" (ver pág. 17) que

$$tg\ \alpha_0 = 3 - \sqrt{5} \qquad \text{y que (ver pág. 10)} \qquad tg\ \varphi_{6-6} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

por lo que

$$tg\left(\varphi_{6-6}-\alpha_0\right)=\frac{tg\,\varphi_{6-6}-tg\,\alpha_0}{1+tg\,\varphi_{6-6}\times tg\,\alpha_0}=\frac{-\frac{2\sqrt{5}}{5}-(3-\sqrt{5})}{1+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times(3-\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{-\frac{2\sqrt{5}}{5}-3+\sqrt{5}}{1-\frac{6\sqrt{5}}{5}+\frac{10}{5}}=\frac{\frac{-2\sqrt{5}-15+5\sqrt{5}}{5}}{\frac{5-6\sqrt{5}+10}{5}}=\frac{3\sqrt{5}-15}{15-6\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-5}{5-2\sqrt{5}}=$$

$$=-\frac{5-\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}=-\frac{(5-\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{5}=-\frac{25-5\sqrt{5}+10\sqrt{5}-10}{5}=-\frac{15+5\sqrt{5}}{5}=$$

$=-(3+\sqrt{5})$ valor que sustituido en [2] nos da

$$-(3+\sqrt{5})=-ctg\,\beta_0 \quad " \quad ctg\,\beta_0=3+\sqrt{5} \quad "$$

$tg\,\beta_0=\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ y de esta última [3]

$$\boxed{\cos\beta_0}=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta_0}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9+5-6\sqrt{5}}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{14-6\sqrt{5}}{16}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{7-3\sqrt{5}}{8}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{8+7-3\sqrt{5}}{8}}}=\sqrt{\frac{8}{15-3\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{8}{3(5-\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{8(5+\sqrt{5})}{3\times 20}}=$$

$=\boxed{\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}}}$ De la fig. 2 se deduce finalmente que [4]

$$\boxed{g_3}=g_2+k_6\cos\beta_0=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\cdot l+\frac{\sqrt{3}}{2}\,l\times\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}+\sqrt{\frac{6(5+\sqrt{5})}{60}}\right)l=\left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)l=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)^2}\times l=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}+2\sqrt{\frac{(10-2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{50}}}\times l=$$

$$=\sqrt{\frac{20-4\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{10}+2\sqrt{\frac{50-10\sqrt{5}+10\sqrt{5}-10}{50}}}\times l=\sqrt{\frac{25-3\sqrt{5}}{10}+2\sqrt{\frac{40}{50}}}\times l=$$

$$=\sqrt{\frac{25-3\sqrt{5}}{10}+2\times\frac{2}{\sqrt{5}}}\times l=\sqrt{\frac{25-3\sqrt{5}}{10}+\frac{4\sqrt{5}}{5}}\times l=\sqrt{\frac{25-3\sqrt{5}+8\sqrt{5}}{10}}\times l=$$

$$=\sqrt{\frac{25+5\sqrt{5}}{10}}\times l=\boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\times l}=1{,}90\ 21\ 13\ 03\ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $g_3 = 1{,}90\ 21\ 13\ 03\ldots \times 22{,}195 = 42{,}2$ mm

---

<u>Distancia "f_3" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 21 al 30 y 31 al 40 respectivamente</u>

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_5" y "g_3" ya calculadas

$$\boxed{f_3}=2\,(c_5-g_3)=2\left(\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}}-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)l=$$

$$=2\sqrt{\left(\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}}-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)^2}\,l=2\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}+\frac{5+\sqrt{5}}{2}-2\sqrt{\frac{(125+41\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{80}}}\,l=$$

$$=2\sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}+100+20\sqrt{5}}{40}-\sqrt{\frac{625+205\sqrt{5}+125\sqrt{5}+205}{20}}}\times l=$$

$$=2\sqrt{\frac{225+61\sqrt{5}}{40}-\sqrt{\frac{830+330\sqrt{5}}{20}}}\times l=2\sqrt{\frac{225+61\sqrt{5}}{40}-\frac{\sqrt{83+33\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}}\,l=$$

$$=2\sqrt{\frac{225+61\sqrt{5}}{40}-\frac{\sqrt{\frac{83+38}{2}}+\sqrt{\frac{83-38}{2}}}{\sqrt{2}}}\times l=2\sqrt{\frac{225+61\sqrt{5}}{40}-\sqrt{\frac{121}{4}}-\sqrt{\frac{45}{4}}}\times l=$$

$$= 2\sqrt{\frac{225 + 61\sqrt{5}}{40} - \frac{11}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}} \times \ell = 2\sqrt{\frac{225 + 61\sqrt{5} - 220 - 60\sqrt{5}}{40}} \times \ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell} = 0,85\,06\,50\,88 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $f_3 = 0,85\,06\,50\,88 \ldots \times 22,195 = 18,9$ mm

---

Radio "r_3" de las circunferencias que contienen a los vértices 21 al 30 y 31 al 40 respectivamente

Este radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_3}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_3} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}}\,\ell\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \ell = \sqrt{\frac{145 + 45\sqrt{5} - 5 - \sqrt{5}}{40}} \times \ell = \sqrt{\frac{140 + 44\sqrt{5}}{40}} \times \ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{35 + 11\sqrt{5}}{10}} \times \ell} = 2,44\,12\,44\,51 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $r_3 = 2,44\,12\,44\,51 \ldots \times 22,195 = 54,2$ mm

---

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados de los valores complementarios deducidos.

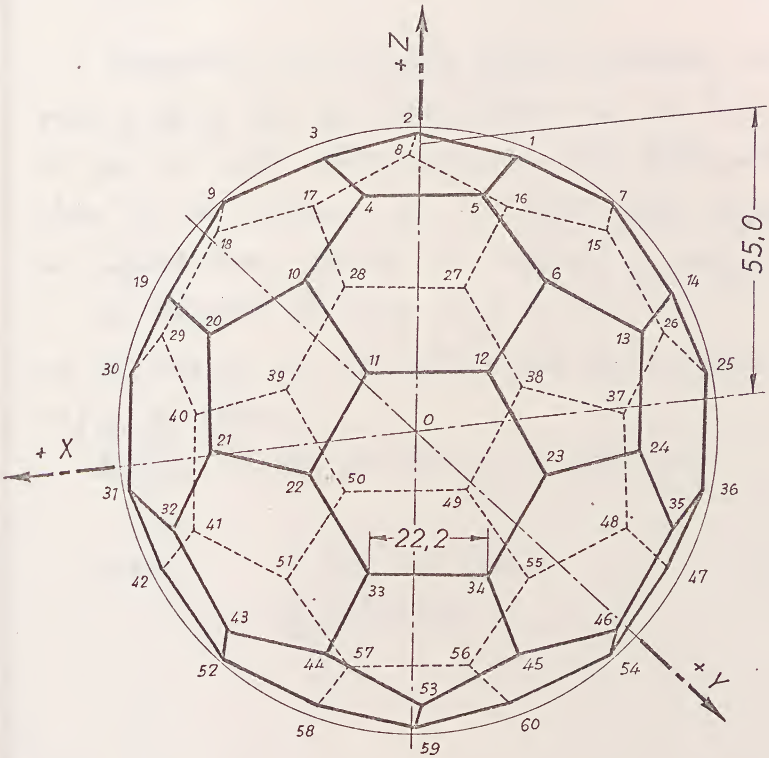
UNE A 4-210 x 297

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
k_5	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell$	0, 68 81 91... ℓ
k_6	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$	0, 86 60 25... ℓ
f_1	$\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	3, 60 34 15... ℓ
f_2	$3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	2, 55 19 53... ℓ
f_3	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0, 85 06 51.... ℓ
g_1	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0, 52 57 31.... ℓ
g_2	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	1. 05 14 62... ℓ
g_3	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,\ell$	1,.90 21 13... ℓ
r_1	$\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	1. 70 13 02.... ℓ
r_2	$\sqrt{\frac{25+9\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	2, 12 42 55.... ℓ
r_3	$\sqrt{\frac{35+11\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	2, 44 12 45... ℓ

UNE A 4-210 x 297

9 - 6 - 73



Arquimediano XIII

Lámina 46	Poliedros arquimedianos Arquimedianos Serie A_n $(3P_3+1P_n)$	46

ENUNCIADO

Representar, por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un Arquimediano de la Serie A_n, en el que en cada vértice concurren tres triángulos equiláteros y un polígono de "n" lados, todos regulares y de igual lado, siendo "n" natural y mayor que 3

La longitud del lado, para $n = 7$ es de 44.7 mm, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

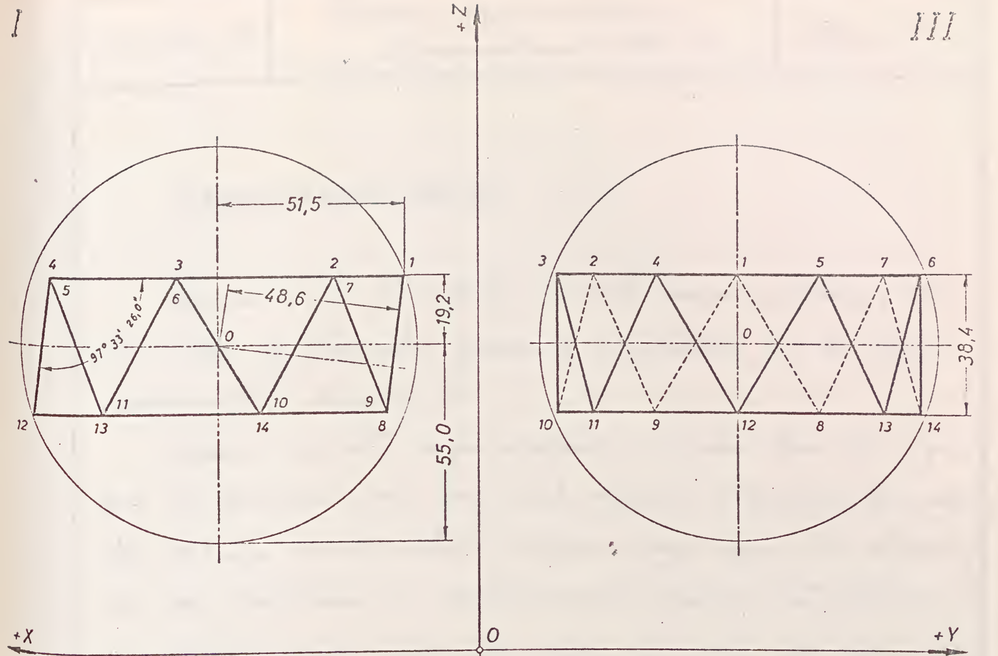
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

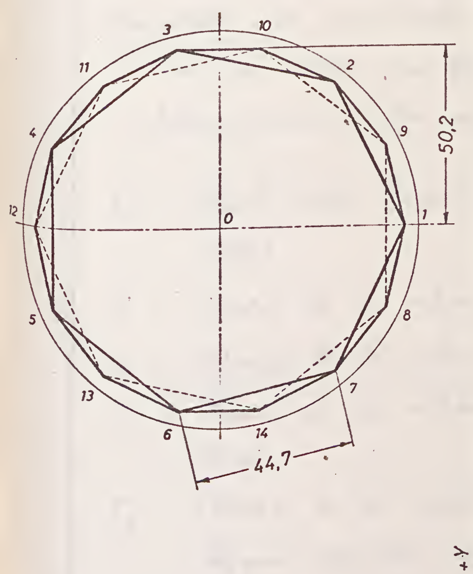
DATOS: O (72, 72, 85) mm

$\ell_{A_7} = 44.7$ mm

UNE A 4-210 x 297

11-6-73





ARQUIMEDIANOS Serie A_n

Número de caras triangulares	$C_3 = 2n$
Número de caras regulares de "n" lados	$C_n = 2$
Número de vértices	$V = 2n$
Número de aristas	$A = 4n$
Número de caras de un ángulo sólido	$3P_3 + 1P_n$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un Arquimediano de la Serie A_n, en el que en cada vértice concurren tres triángulos equiláteros y un polígono regular de "n" lados, todos de igual longitud, siendo "n" un número natural mayor que 3. La longitud del lado, para n = 7, es de 44,7 mm, y las coordenadas de su centro son: O (72, 72, 85).

Dibujar en formato A3v y a escala 1: 1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1 : 1	Arquimedianos Serie A_n					Lámina 46 / Curso 19 - 19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de estos arquimedianos, las directrices y fórmulas generales planteadas en el "Arquimediano I," lámina 33.

Existen infinitos arquimedianos de esta Serie A_n, ya que el número de lados del polígono regular P_n, puede ser un número natural cualquiera mayor que 3. El estudio que realizamos a continuación considera este polígono en general, para cualquier valor de "n", así como la longitud de su lado correspondiente que designaremos a su vez, en forma general "l_n" $(n > 3)$.

Determinaremos las siguientes magnitudes

l_n = Arista del Arquimediano Serie A_n (dato del ejercicio).

a = Radio de la esfera circunscrita

b = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

c_n = Radio de la esfera tangente a las caras del polígono regular de "n" lados que en todos los casos son tan sólo dos P_n.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular

d_n = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara regular de "n" lados.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

α_n = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara regular de "n" lados, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-n} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra regular de "n" lados

φ_{3-3} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras triangulares

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de "2n" caras triangulares, 2 caras regulares de "n" lados; "2n" vértices y "4n" aristas.

En cada vértice concurren 3 caras triangulares y una regular de "n" lados, todas de igual lado.

UNE A 4:210 x 297

Así pues, tendremos que:

ARQUIMEDIANO "A_n" $(3P_3 + 1P_n)$; $C_3 = 2n$; $C_n = 2$; $V = 2n$; $A = 4n$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l_n" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas de un ángulo sólido.

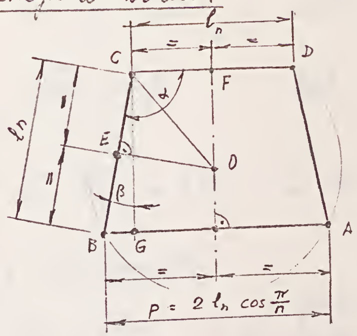


Figura 1

Este polígono es un trapecio isósceles A-B-C-D (fig. 1) cuya base menor $\overline{C\text{-}D}$ y sus lados oblicuos $\overline{C\text{-}B}$ y $\overline{D\text{-}A}$ son todos iguales al lado "l_n" del arquimediano; la base mayor $\overline{A\text{-}B}$ es la diagonal "p" del polígono regular C_n que une los extremos de dos lados consecutivos $(p > l_n)$.*

El valor de la diagonal "p" se deduce de la figura 2, en la que representamos parte del contorno de la cara regular de "n" lados.

---

* Siendo $n > 3$ el ángulo α será siempre $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$ y por consiguiente $p \geqq l_n\sqrt{2}$.

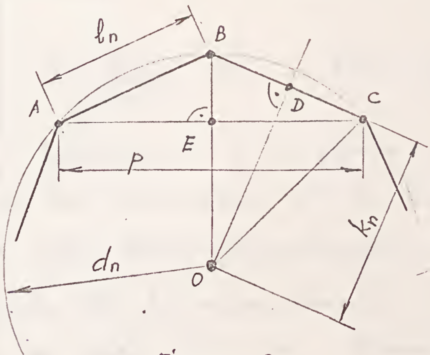


Figura 2

En dicha figura 2, tenemos $\overline{AB} = \overline{BC} = l_n$, dos lados consecutivos de un polígono regular de "n" lados, siendo "l_n" la longitud de su lado, y O el centro de su circunferencia circunscrita.

Unamos los extremos $\overline{B}$ y $\overline{C}$ de un lado, con el centro O; el triángulo $\overline{OBC}$ será isósceles y su altura OD, perpendicular a $\overline{BC}$ en su punto medio y bisectriz del ángulo $\widehat{BOC}$.

De la figura se deduce:

$$\widehat{BOC} = \frac{2\pi}{n} \quad " \quad \widehat{BOD} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{\pi}{n} \quad " \quad \widehat{DBO} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

$$\overline{EC} = \overline{BC} \text{ sen } \widehat{DBO} = l_n \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = l_n \cos\frac{\pi}{n}$$

y finalmente

$$\overline{AC} = \boxed{P} = 2 \cdot \overline{EC} = \boxed{2\, l_n \cos\frac{\pi}{n}} \qquad [1]$$

La apotema del polígono será:

$$\text{apotema} = \overline{OD} = \boxed{K_n} = \overline{BD} \times tg\ \widehat{DBO} = \boxed{\frac{l_n}{2} : tg\frac{\pi}{n}} \qquad [2]$$

y el radio de la circunferencia circunscrita:

$$\overline{OB} = \boxed{d_n} = \overline{BD} : \cos \widehat{DBO} = \frac{l_n}{2} : \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \boxed{\frac{l_n}{2} : \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \qquad [3]$$

Refiriéndonos a la figura 1, tracemos por $\overline{E}$ y $\overline{F}$, puntos medios respectivos de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, perpendiculares a éstos, dichas perpendiculares se cortarán en un punto O, centro de la circunferencia circunscrita al trapecio $\overline{A-B-C-D}$, y de radio $\overline{OC} = m$. Trazando seguidamente por $\overline{C}$ la perpendicular a $\overline{BA}$, se nos formará el triángulo rectángulo CBG, recto en G; en éste se verificará que

$$\overline{BG} = \frac{\overline{BA} - \overline{CD}}{2} = \frac{2\, l_n \cos\frac{\pi}{n} - l_n}{2} = l_n \cos\frac{\pi}{n} - \frac{l_n}{2} = \left(\cos\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\right) l_n$$

pero siendo

$$\cos \widehat{CBG} = \operatorname{sen} \widehat{BCG} = \frac{BG}{BC} = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\right) l_n}{l_n} = \cos\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}$$

y también

$$\alpha = 2\pi - \widehat{CBG}$$

será
$$\cos\alpha = \cos\left(2\pi - \widehat{CBG}\right) = -\cos\widehat{CBG} = -\left(\cos\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\right)$$

por lo que

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\alpha\right)} = \sqrt{\frac{1 - \left(\cos\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} - \cos\frac{\pi}{n}}{2}} = \sqrt{\frac{3 - 2\cos\frac{\pi}{n}}{4}}$$

Y finalmente, de la figura 1 se deduce que

$$CO = \boxed{m} = \frac{\overline{EC}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{l_n : 2}{\sqrt{\frac{3 - 2\cos\frac{\pi}{n}}{4}}} l_n = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3 - 2\cos\frac{\pi}{n}}{4}}}\, l_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3-2\cos\frac{\pi}{n}}}\, l_n = \boxed{\sqrt{\frac{1}{3-2\cos\frac{\pi}{n}}}\; l_n}$$

* cálculo logarítmico

$$\lg 1 = 0,$$
$$-\lg 1{,}19\,80\,620 = -0{,}07\,84\,591$$
$$\overline{1}{,}92\,15\,409$$
$$\tfrac{1}{2}\lg \overline{1}{,}92\,15\,409 = \overline{1}{,}96\,07\,603$$
$$\text{Antilog } \overline{1}{,}96\,07\,603 = \boxed{0{,}91\,36\,089}$$

Para el caso del dibujo $n = 7$, será:

$$\Big] = \sqrt{\frac{1}{3-2\cos(180°:7)}}\; l_7 = \sqrt{\frac{1}{3-2\cdot\cos 25°\,42'\,51{,}4''}}\; l_7 =$$

$$\sqrt{\frac{1}{3-2\times 0{,}90\,09\,69\,0}} \times l_7 = \sqrt{\frac{1}{1{,}19\,80\,62\,0}}^{\,*} \times l_7 =$$

$$0{,}91\,36\,08\,9\ldots \times l_7 = 0{,}91\,36\,08\,9\ldots \times$$

$$\lg\cos 25°\,42'\,51{,}4'' = \overline{1}{,}95\,47\,09\,8$$
$$\text{Antilog } \overline{1}{,}95\,47\,098 = 0{,}90\,09\,69\,0$$

<u>Radio "a" de la esfera circunscrita</u>

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lámina 33)

$$\boxed{a} = \frac{l_n^2}{2\sqrt{l_n^2 - m^2}} = \frac{l_n^2}{2\sqrt{l_n^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{3-2\cos\frac{\pi}{n}}}\times l_n\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{3-2\cos\frac{\pi}{n}}}} \times l_n =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{3-2\cos\frac{\pi}{n}-1}{3-2\cos\frac{\pi}{n}}}}\; l_n = \sqrt{\frac{3-2\cos\frac{\pi}{n}}{4\left(2-2\cos\frac{\pi}{n}\right)}} \times l_n = \boxed{\sqrt{\frac{3-2\cos\frac{\pi}{n}}{8\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}} \times l_n}$$

Para el caso del dibujo $n = 7$, será:

$$a = \sqrt{\frac{3-2\cos(180°:7)}{8\,(1-\cos(180°:7))}} \times l_n = \sqrt{\frac{3-2\cos 25°\,41'\,51{,}4''}{8\,(1-\cos 25°\,41'\,51{,}4'')}} \times l_n =$$

$$= \sqrt{\frac{3-2\times 0{,}90\,09\,69\,0}{8\,(1-0{,}90\,09\,69\,0)}} \times l_n = \sqrt{\frac{1{,}19\,80\,62\,0}{0{,}79\,22\,48\,0}} \times l_n = 1{,}22\,97\,28\,0 \times l_n$$

Cálculo logarítmico anterior

$$\lg 1.19\,80\,62 = 0,07\,84\,79\,3$$

$$-\lg 0.79\,22\,48 = -\bar{1},898\,86\,11$$

$$0,17\,96\,18\,2$$

$$\frac{1}{2} \times 0.17\,96\,18\,2 = 0,08\,98\,09\,1$$

$$\text{Antilog } 0,08\,98\,09\,1 = 1,22\,97\,28\,0\ldots$$

Para el caso del dibujo $n = 7$ y $a = 55,0$ será:

$$a = 55 \text{ mm.} \qquad l_7 = \frac{55}{1.22\,97\,28} = 44,725 \text{ mm.}$$

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Se obtiene aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33)

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{l_n^2}{4}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3 - 2\cos\frac{\pi}{n}}{8\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}} \times l_n\right)^2 - \frac{1}{4}\,l_n^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3 - 2\cos\frac{\pi}{n}}{8\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)} - \frac{1}{4}} \times l_n = \sqrt{\frac{12 - 8\cos\frac{\pi}{n} - 8\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{32\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}} \times l_n =$$

$$= \sqrt{\frac{12 - 8\cos\frac{\pi}{n} - 8 + 8\cos\frac{\pi}{n}}{32\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}} \times l_n = \sqrt{\frac{4}{32\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}} \times l_n =$$

$$\boxed{= \sqrt{\frac{1}{8\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}} \times l_n}$$

Para el caso del dibujo $n = 7$, será:

$$b = \sqrt{\frac{1}{8\,(1-\cos\,(180:7))}} \times l_7 = \sqrt{\frac{1}{8\,(1-\cos 25°\,41'\,51.4'')}} \times l_7 =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8\,(1-0{,}90\,09\,69\,0)}} \times l_7 = \sqrt{\frac{1}{0{,}79\,22\,48\,0}} \times l_7 = 1{,}12\,34\,90\ldots \times 44{,}725 =$$

$= 50{,}2$ mm.

<u>Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular</u>

Se demuestra en Geometría es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l_n} = 0{,}57\,73\,50\,27\ldots l_n$$

Para el caso del dibujo, será: $d_3 = 0.57\,73\,50\,27\ldots \times 44{,}725 = 25{,}8$ mm

---

<u>Radio "d_n" de la circunferencia circunscrita a una cara regular de "n" lados.</u>

En la página 5, formula [3], hemos determinado su valor.

$$\boxed{d_n = \frac{l_n}{2} : \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}$$

Para el caso del dibujo, $n = 7$, será:

$$d_7 = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}\, l_n = \frac{1}{2\operatorname{sen}\,(180°:7)}\, l_n = \frac{1}{2\operatorname{sen}\,(25°\,41'\,51.4'')}\, l_n =$$

$$= \frac{1}{2 \times 0{,}43\,38\,83\,6} \times l_n = 1{,}15\,23\,82\,8\ldots \times 44{,}725 = 51.5 \text{ mm}$$

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares de lado "l_n"

Se obtiene aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n)}} \times l_n\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} l_n\right)^2} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - \frac{1}{3}} \times l_n}$$

Para el caso del dibujo $n = 7$, será: (ver cálculo numérico "a")

$$c_3 = \sqrt{\frac{3-2\cos(180°:7)}{8(1-\cos(180°:7))} - \frac{1}{3}} \times l_n = \sqrt{\frac{1,1980620}{0,7922480} - \frac{1}{3}} \times l_n =$$

$$= \sqrt{\frac{3 \times 1,198062 - 0,792248}{3 \times 0,792248}} \times l_n = \sqrt{\frac{2,801938}{2,376744}} \times l_n =$$

$$= 1,0857688\ldots \times 44,725 = 48,6 \text{ mm}$$

Radio "c_n" de la esfera tangente a las caras regulares de "n" lados.

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_n} = \sqrt{a^2 - (d_n)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))}} \times l_n\right)^2 - \left(\frac{l_n}{2\,\text{sen}(\pi:n)}\right)^2} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\,\text{sen}(\pi:n)}\right)^2} \times l_n}$$

UNE A 4-210 x 297

Para el caso del dibujo, será $n = 7$ (ver cálc. num. de "a" y "d_7")

$$c_7 = \sqrt{\frac{3 - 2\cos(\pi:7)}{8(1-\cos(\pi:7))} - \frac{1}{[2\,\mathrm{sen}(\pi:7)]^2}} \times l_7 = \sqrt{\frac{1.19\,80\,62\,0}{0.79\,22\,48\,0} - \left(\frac{1}{0.86\,77\,67\,2}\right)^2} \, l_n$$

$$= \sqrt{1,51\,22\,31\,0 - 1,32\,79\,86\,1} \times l_n = \sqrt{0,18\,42\,44\,9} \times l_n = 0,42\,92\,37\,6 \times l_n =$$

$$= 0,42\,92\,37\,6 \ldots \times 44,725 = 19,2 \text{ mm}.$$

<u>Angulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla</u>

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33)

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha_3} = \frac{2\,c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - l_n^2}} = \frac{2\,c_3}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1}\;l_n} = \frac{2\,c_3}{\sqrt{\frac{1}{3}}\,l_n} = 2\sqrt{3} \times \frac{c_3}{l_n} =$$

$$= 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{3 - 2\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - \frac{1}{3}} \times \frac{l_n}{l_n} = \boxed{2\sqrt{\frac{9 - 6\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - 1}}$$

Para el caso del dibujo, $n = 7$; será

$$\mathrm{tg}\,\alpha_3 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{3 - 2\cos(\pi:7)}{8(1-\cos(\pi:7))} - \frac{1}{3}} = 2\sqrt{3} \times 1,08\,57\,68\,8 \ldots =$$

$$= 3,46\,41\,01\,6 \ldots \times 1,08\,57\,68\,8 \ldots = 3,76\,12\,13\,4 \ldots$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha_3 = \lg 3{,}76\ 12\ 13\ 4 = 0{,}57\ 53\ 28\ 0$$

$$\alpha_3 = 75^\circ\ 6'\ 40{,}0''$$

<u>Angulo rectilíneo "α_n" del diedro formado por una cara regular de "n" lados, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.</u>

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33)

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_n} = \frac{2\ c_n}{\sqrt{4\,(d_n)^2 - \ell^2}} = \frac{2\ C_n}{\sqrt{4\left(\frac{\ell_n}{2\ \operatorname{sen}(\pi:n)}\right)^2 - \ell_n^2}} = \frac{2\ C_n}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)} - 1} \times \ell_n}$$

$$= 2\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8\,(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\ \operatorname{sen}(\pi:n)}\right)^2} \times \ell_n : \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}} \times \ell_n =$$

$$= 2\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8\,(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\ \operatorname{sen}(\pi:n)}\right)^2} : \sqrt{\frac{\cos^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8\,(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\ \operatorname{sen}(\pi:n)}\right)^2} : \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi:n)} =$$

$$= \boxed{2\operatorname{tg}(\pi:n)\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8\,(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\ \operatorname{sen}(\pi:n)}\right)^2}}$$

Para el caso del dibujo $n = 7$, será

$$\operatorname{tg} \alpha_7 = 2\operatorname{tg}(\pi:7) \times \sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:7)}{8\,(1-\cos(\pi:7))} - \left(\frac{1}{2\ \operatorname{sen}(\pi:7)}\right)^2} =$$

$= 2\ tg\ (25°\ 41'\ 51{,}4'') \times 0{,}42\ 92\ 37\ 6 \ldots$

Cálculo logarítmico

$$\begin{array}{lllll} & lg\ tg\ \alpha_7 = lg\ 2 & & = & 0{,}30\ 10\ 30\ 0 \\ + & & lg\ tg\ (25°\ 41'\ 51{,}4'') & = & \bar{1},68\ 23\ 40\ 1 \quad + \\ + & & lg\ 0{,}42\ 92\ 37\ 6 & = & \underline{\bar{1},63\ 26\ 97\ 8} \quad + \\ & & lg\ tg\ \alpha_7 & = & \bar{1},61\ 60\ 67\ 9 \end{array}$$

$$\alpha_7 = 22°\ 26'\ 46{,}0''$$

Angulo rectilineo "φ_{3-n}" del diedro formado por una cara triangular y otra regular de "n" lados

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{3-n} = \alpha_3 + \alpha_n}$$

Para el caso del dibujo, $n = 7$, será

$$\varphi_{3-7} = \alpha_3 + \alpha_7 = 75°\ 6'\ 40{,}0'' + 22°\ 26'\ 46{,}0'' =$$

$$= 97°\ 33'\ 26{,}0''$$

Ángulo rectilineo "φ_{3-3}" del diedro formado por dos caras triangulares.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{3-3}} = \alpha_3 + \alpha_3 = \boxed{2\,\alpha_3}$$

Para el caso del dibujo, será: $(n = 7)$

$$\varphi_{3-3} = 2 \times \left(75^\circ\ 6'\ 40{,}0'' \right) = 150^\circ\ 13'\ 20{,}0''$$

Área lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de "2n" caras triangulares y de (para cualquier valor natural de $n > 3$) siempre 2 caras regulares de "n" lados.

La apotema de una cara triangular es de $\frac{\sqrt{3}}{6} l_n$; el área de una cara será pues $\frac{3l}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{6} l_n = \frac{\sqrt{3}}{4} (l_n)^2$.

La apotema de una cara regular de "n" lados, la hemos obtenido en [2] (ver hoja nº 4), y es

$$k_n = \frac{l_n}{2\ tg\,(\pi : n)}$$

El área total será pues:

$$\boxed{S} = 2\,n\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,(l_n)^2 + 2 \times \left(\frac{n \times l_n}{2} \times \frac{l_n}{2\ tg\,(\pi : n)} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,n\,(l_n)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\ tg\,(\pi : n)}\,n\,(l_n)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{ctg\,(\pi : n)}{2} \right) n\,(l_n)^2 = \boxed{\frac{\sqrt{3} + ctg\,(\pi : n)}{2}\,n\,(l_n)^2}$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de "2n" pirámides re-

gulares de base triangular y altura "c_3", y de 2 pirámides de base regular de "n" lados y altura "c_n". Su valor será pues:

$$\boxed{V} = 2n\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(l_n)^2\right) \times \frac{c_3}{3} + 2\left(\frac{n\,l_n}{2} \times \frac{l_n}{2\,tg\,(\pi:n)}\right) \times \frac{c_n}{3} =$$

$$= \frac{n\sqrt{3}}{6}(l_n)^2 \times \sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - \frac{1}{3}} \times l_n + \frac{n\,(l_n)^2}{6\,tg\,(\pi:n)} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\,sen\,(\pi:n)}\right)^2} \times l_n =$$

$$= \boxed{\left(\frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{9-6\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - 1} + \frac{ctg\,(\pi:n)}{6} \times \sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\,sen\,(\pi:n)}\right)^2}\right) n\,(l_n)^3}$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de "$2n$" triángulos equiláteros de lado "l_n", y de 2 caras regulares de "n" lados de igual magnitud "l_n". El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran 3 triángulos y un polígono regular de "n" lados.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, se resumen los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8\times(1-\cos(\pi:n))}} \times \ell_n$	Variable con $n>3$
b	$\sqrt{\frac{1}{8(1-\cos(\pi:n))}} \times \ell_n$	Variable con $n>3$
c_3	$\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8\cdot(1-\cos(\pi:n))} - \frac{1}{3}} \times \ell_n$	Variable con $n>3$
c_n	$\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8\cdot(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\pi:n)}\right)^2} \cdot \ell_n$	Variable con $n>3$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell_n$	$0{,}57\ 73\ 50\ldots\ \ell_n$
d_n	$\frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\pi:n)} \cdot \ell_n$	Variable con $n>3$
m	$\sqrt{\frac{1}{3-2\cos(\pi:n)}} \times \ell_n$	Variable con $n>3$
α_3	$tg\ \alpha_3 = 2\times\sqrt{\frac{9-6\cos(\pi:n)}{8\cdot(1-\cos(\pi:n))} - 1}$	Variable con $n>3$
α_n	$tg\ \alpha_n = 2\ tg(\pi:n)\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8\times(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\pi:n)}\right)^2}$	Variable con $n>3$
φ_{3-n}	$\varphi_{3-n} = \alpha_3 + \alpha_n$	Variable con $n>3$
φ_{3-3}	$\varphi_{3-3} = 2\ \alpha_3$	Variable con $n>3$
S	$\frac{\sqrt{3} + ctg(\pi:n)}{2} \times n\left(\ell_n\right)^2$	Variable con $n>3$
V	$V = \left[\frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{9-6\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - 1} + \frac{ctg(\pi:n)}{6}\times\sqrt{\frac{3-2\cos(\pi:n)}{8(1-\cos(\pi:n))} - \left(\frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\pi:n)}\right)^2}\right]\times n\left(\ell_n\right)^3$	Variab. $n>3$

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 46, a la representación gráfica de un Arquimediano de la Serie A_n, en el caso particular de ser $n = 7$.

Para su trazado nos valdremos de las cotas calculadas por las fórmulas anteriores, determinadas previamente para el caso particular que nos ocupa. Dichas magnitudes las obtendremos en función del lado "l_7" del arquimediano, cuya longitud es de 44,725 mm.

El cálculo de dichas magnitudes se efectúa a continuación:

l_7 = Dato del ejercicio = 44,7 mm

a = 1.22 97 28 0... × 44,725 = 55,0 mm

b = 1,12 34 70 0... × 44,725 = 50,2 mm

C_3 = 1.08 57 68 8 × 44,725 = 48,6 mm

C_7 = 0,42 92 37 6 × 44,725 = 19.2 mm

d_3 = 0,57 73 50 3 ...× 44,725 = 25,8 mm

d_7 = 1,15 23 82 8.... × 44,725 = 51,5 mm

Para facilitar el trazado gráfico, hemos elegido la posición del arquimediano A_7 (y en general A_n) de forma que sus caras regulares de 7 lados (siempre son dos), sean paralelas a II, y uno de sus lados perpendicular a I; de esta forma obtenemos en I la verdadera amplitud

del diedro que forma esa cara, con la triangular contigua cuya arista común es dicho lado de "P_n" perpendicular a I.

En estas condiciones, la proyección (sobre II) de la cara superior P_7 será un polígono regular de 7 lados y radio "d_7", con uno de sus lados perpendicular a I y el de la otra cara inferior P_7, otro polígono igual, concéntrico con el anterior y girado con respecto a éste un ángulo "$\pi : 14$" (en general "$\pi : 2n$"); el contorno aparente de esta proyección sobre II será un polígono regular de 14 lados (en general de "$2n$" lados) inscrito en la misma circunferencia de radio "d_7" conocido.

Teniendo presente lo expuesto anteriormente, el orden de operaciones del trazado gráfico (lámina 16), es el siguiente:

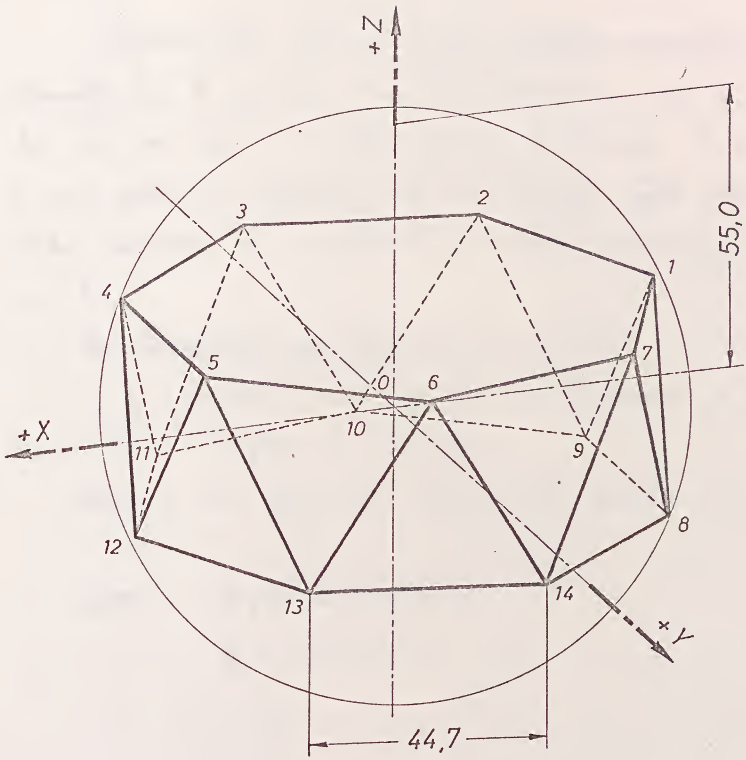
1° Situar el centro O de coordenadas O(72, 72, 85) mm.

2° Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita de 55,0 mm de radio

3° Dibujar la proyección sobre II del Arquimediano, trazando con centro O_{II} y radio "d_7" una circunferencia que se dividirá en 14 partes iguales (en general "$2n$") tomando como origen de división el radio O1, paralelo a +X. Después de efectuada la división unir éstas en la forma que se indica en la lámina con lo que obtendremos la proyección buscada (comprobar

las longitudes de "l_7" y "b")

4° Conocida la proyección sobre II del arquimediano, y basándose en ella, puede obtenerse seguidamente las proyecciones I y III, bastando para ello trazar dos paralelas al eje $+x$, equidistantes de O_I y O_{III}, y con la separación "c_7". Sobre la superior, estarán situados los vértices 1 al 7, y sobre la inferior los 8 al 14; las proyecciones de dichos vértices habrán de corresponderse con las ya obtenidas en el plano II. (comprobar la longitud de "c_3" y la amplitud de "φ_{3-7}").



n = 7

Arquimedianos Serie A_n

Lámina 47	Poliedros arquimedianos Arquimedianos Serie B_n $(2P_4 + 1P_n)$	47

ENUNCIADO

Representar, por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un Arquimediano de la Serie B_n, en el que en cada vértice concurren 2 cuadrados y un polígono regular de "n" lados, todos de igual lado, siendo "n" natural y mayor que 2, excepto $n = 4$.

La longitud del lado, para $n = 9$,

es de 35,6 mm, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

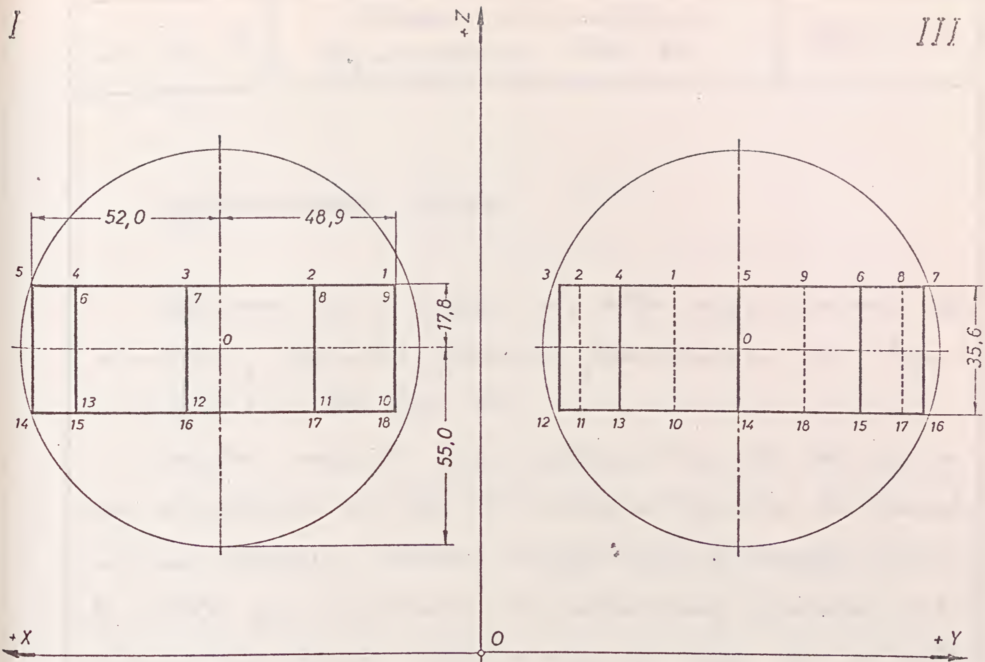
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

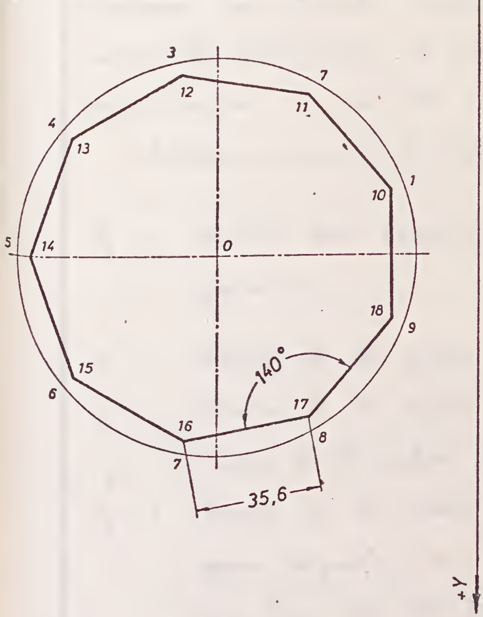
DATOS: O (72, 72, 85) mm

$l_{B_9} = 35,6$ m m.

UNE A 4-210 x 297

22 - 6 - 73





ARQUIMEDIANOS Serie B_n

Número de caras cuadradas..............	$C_4 = n$
Número de caras regulares de "n" lados	$C_n = 2$
Número de vértices........................	$V = 2n$
Número de aristas.........................	$A = 3n$
Número de caras de un ángulo sólido...	$2P_4 + 1P_n$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un Arquimediano de la Serie B_n, en el que en cada vértice concurren dos cuadrados y un polígono regular de "n" lados todos de igual longitud, siendo "n" un número natural igual a 3, o mayor que 4. La longitud del lado, para n=9, es de 35,6 mm, y las coordenadas de su centro son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimedianos Serie B_n					Lámina 47
						Curso 19 - 19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de estos arquimedianos, las directrices y fórmulas generales planteadas en el "Arquimediano I", lámina 33.

Existen infinitos arquimedianos de esta Serie B_n, ya que el número de lados del polígono regular P_n, puede ser un número natural mayor que 2, excepto $n = 4$. El estudio que realizamos a continuación considera este polígono en general, para cualquier valor de "n", así como la longitud de su lado correspondiente que designaremos a su vez, en forma general "l_n"

Determinaremos las siguientes magnitudes:

l_n = Arista del Arquimediano Serie B_n (dato del ejercicio.

a = Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_4 = Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas

c_n = Radio de la esfera tangente a las caras del polígono regular de "n" lados que en todos los casos son tan sólo dos P_n.

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1. [illegible]

2. [illegible]

3. [illegible]

4. [illegible]

d_n = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara regular de "n" lados.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_4 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

α_n = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara regular de "n" lados, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

φ_{4-n} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada y otra regular de "n" lados.

φ_{4-4} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras cuadradas.

S = Superficie

V = Volumen

Antes de proceder al cálculo de las magnitudes anteriores, observemos que todos los arquimedianos de esta serie B_n, son prismas rectos regulares de bases P_n y caras laterales cuadradas. Bajo este enfoque, los cálculos anteriores permiten una notable simplificación. No obstante, los desarrollaremos siguiendo el proceso

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

general establecido en el estudio del arquimediano I, lámina 33.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de "n" caras cuadradas, 2 caras regulares de "n" lados; "2n" vértices y "3n" aristas.

En cada vértice concurren 2 caras cuadradas y una regular de "n" lados, todas de igual lado.

Así pues, tendremos que:

$$\boxed{\text{ARQUIMEDIANO } "B_n" \ (2P_4 + 1P_n); \quad C_4 = n; \quad C_n = 2; \quad V = 2n; \quad A = 3n}$$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "ℓ_n" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las tres aristas de un ángulo sólido.

Este polígono es un triángulo isósceles ABC (fig. 1)

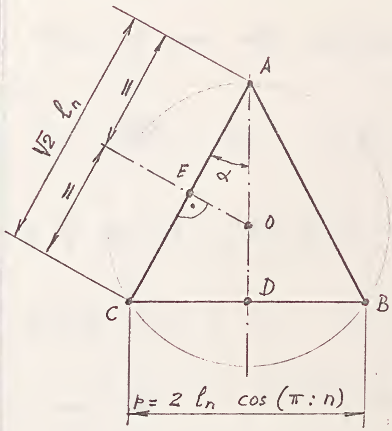


Figura 1

cuya base BC es la diagonal "p" del polígono regular C_n que une los extremos de dos lados consecutivos ($n > 2$, excepto $n = 4$). El valor de $\overline{CB}$ ha sido obtenido en la lám. 46, h 4, fig. 2, y es $\overline{CB} = p = 2\,\ell_n \cos(\pi : n)$.

Los otros dos lados iguales $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son diagonales de las caras cuadradas que concurren en el ángulo sólido; su magnitud será pues $\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{2}\,\ell_n$

De la figura se deduce :

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{(\sqrt{2}\,\ell_n)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\,2\cos(\pi : n)\,\ell_n\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2 - \cos^2(\pi : n)} \times \ell_n = \sqrt{1 + (1 - \cos^2(\pi : n))}\;\ell_n = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(\pi : n)}\;\ell_n$$

por lo que será:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(\pi : n)} \times \ell_n}{\sqrt{2}\;\ell_n} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen}^2(\pi : n)}{2}}$$

y en consecuencia :

$$AO = \boxed{m} = \frac{\overline{AE}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell_n : \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen}^2(\pi : n)}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 : \frac{1 + \operatorname{sen}^2(\pi : n)}{2}} \times \ell_n =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2(\pi : n)}} \times \ell_n}$$

Para el caso del dibujo, $n = 9$, será:

$$\frac{\pi}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ \qquad \lg \operatorname{sen} 20^\circ = \bar{1},53\,40\,517$$

$$2 \lg \operatorname{sen} 20^\circ = 2 \times \bar{1},53\,40\,51\,7 = \bar{1},06\,81\,03\,4$$

$$\text{Antilog } \bar{1},06\,81\,03\,4 = \operatorname{sen}^2 20^\circ = 0,11\,69\,77\,8$$

$$1 + \operatorname{sen}^2 20^\circ = 1 + 0,11\,69\,77\,8 = 1,11\,69\,77\,8$$

$$\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 20^\circ}} = \sqrt{\frac{1}{1,11\,69\,77\,8}} = 0,94\,61\,88\,5$$

$$\begin{array}{lcl} \lg 1 & = & 0,00\,00\,00\,0 \\ -\lg 1,11\,69\,77\,8 & = & -\underline{0,04\,80\,44\,6} \\ & & \bar{1},95\,19\,55\,4 \; : 2 = \bar{1},97\,59\,77\,7 \end{array}$$

$$\text{Antilog } \bar{1},97\,59\,77\,7 = \underline{0,94\,61\,88\,5}\ldots$$

$$m = 0,94\,61\,88\,5\ldots \times$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33)

$$\boxed{a} = \frac{l_n^2}{2\sqrt{l_n^2 - m^2}} = \frac{l_n^2}{2\sqrt{l_n^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(\pi:n)}} \times l_n\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(\pi:n)}}} \times l_n = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}{1+\operatorname{sen}^2(\pi:n)}}} \times l_n = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}} \times l_n}$$

UNE A 4-210 x 297

25 - 6 - 73

Para el caso del dibujo, $n = 9$ será: (ver cálculo "m" hoja anterior) $\frac{\pi}{n} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$

$1 + \mathrm{sen}^2\, 20^\circ = 1{,}11\,69\,77\,8$; $\mathrm{sen}^2\, 20^\circ = 0{,}11\,69\,77\,8..$

$a_9 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1{,}11\,69\,77\,8}{0{,}11\,69\,77\,8}}$

$$\begin{array}{lr} \lg 1{,}11\,69\,77\,8 & = 0{,}04\,80\,44\,6 \\ - \lg 0{,}11\,69\,77\,8 & = -\bar{1}{,}06\,81\,03\,4 \\ \hline & 0{,}97\,99\,41\,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \frac{1}{2} \times 0{,}97\,99\,41\,2 = & 0{,}48\,99\,70\,6 \\ - \lg 2 = & -0{,}30\,10\,30\,0 \\ \hline \end{array}$$

$\underline{a} = \text{antilog } 0{,}18\,89\,40\,6 \times l_9 = \underline{1{,}54\,50\,43\,1\ldots} \times l_9$

$\underline{a} = \underline{55{,}0}$ mm. $\underline{l_9} = \frac{55}{1{,}54\,50\,43\,1} = \underline{35{,}6}$ mm.

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33)

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{l_n^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{1 + \mathrm{sen}^2\,(\pi : n)}{\mathrm{sen}^2\,(\pi : n)} \times l^2 - \frac{l_n^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1 + \mathrm{sen}^2\,(\pi : n)}{\mathrm{sen}^2\,(\pi : n)} - 1\right)} \times l_n = \sqrt{\frac{1}{4\,\mathrm{sen}^2\,(\pi : n)}} \times l_n = \boxed{\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,(\pi : n)} \times l_n}$$

Para el caso del dibujo, $n = 9$, será: $\frac{\pi}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$

$$\begin{array}{llr} \lg 1 & & = 0{,}00\,00\,00\,0 \\ \lg 2 = & 0{,}30\,10\,30\,0 & \\ \lg \mathrm{sen}\, 20^\circ = & \bar{1}{,}53\,40\,51\,7 \;\; + & = \bar{1}{,}83\,50\,81\,7 \;\; - \\ \hline & b_9 = \text{antilog} & 0{,}16\,49\,18\,3 \times l_n = \underline{1{,}46\,19\,02\,0} \times l_n \end{array}$$

$= \underline{52{,}0 \text{ mm}} = \underline{b}$

UNE A 4·210 × 297

25 - 6 - 73

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "l_n"

Se demuestra en Geometría, es:

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_n} = 0{,}70\ 71\ 06\ 78\ldots\ l_n$$

Para el caso del dibujo, $n = 9$, es $l_9 = 35{,}6$ mm, y

$d_4 = 0{,}70\ 71\ 06\ 78\ldots \times 35{,}6 = 25{,}2$ mm

Radio "d_n" de la circunferencia circunscrita a una cara regular de "n" lados.

En la lám. 46, h8. hemos determinado su valor, que es

$$\boxed{d_n = \frac{1}{2\ \mathrm{sen}\,(\pi : n)} \cdot l_n} = b$$

La propiedad $\boxed{d_n = b.}$ se deduce también de la figura de la lámina 47.

Para el caso del dibujo, $n = 9$, $l_9 = 35{,}6$ mm, será

$$d_9 = b = 52{,}0 \text{ mm.}$$

Radio "C_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "l_n"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

UNE A 4: 210 x 297

Lámina 47	Poliedros arquimedianos Arquimedianos Serie B_n	Hoja nº 8

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2-(d_4)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{1+\operatorname{sen}^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}\times(\ell_n)^2-\frac{1}{2}(\ell_n)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1+\operatorname{sen}^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}-2\right)}\times\ell_n = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1-\operatorname{sen}^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}\right)}\times\ell_n =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{\cos^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}}\times\ell_n = \sqrt{\frac{1}{4\operatorname{tg}^2(\pi:n)}}\times\ell_n = \boxed{\frac{1}{2\operatorname{tg}(\pi:n)}\,\ell_n}$$

Para el caso del dibujo, $n=9$; $\operatorname{tg}(180^\circ:9) = \operatorname{tg} 20^\circ$; $\ell_9 = 35.6$

$$c_4 = \frac{1}{2\operatorname{tg} 20^\circ}\times\ell_9 =$$

$$\begin{array}{lllll}
\lg 1 = & & & = & 0,00\,00\,00\,0 \\
\lg 2 = & 0.30\,10\,30\,0 & \} & & \\
\lg \operatorname{tg} 20^\circ = & \underline{\bar{1},56\,10\,65\,9} & \}+ & = & \underline{\bar{1},86\,20\,95\,6} \; - \\
 & c_4 = \text{antilog} & & & 0,13\,79\,04\,4 \times \ell_n =
\end{array}$$

$$= \underline{1,37\,37\,39\,6\ldots} \times 35,6 = \underline{48,9 \text{ mm.}} = \underline{c_4}$$

Radio "c_n" de la esfera tangente a las caras regulares de "n" lados

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_n} = \sqrt{a^2-(d_n)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{1+\operatorname{sen}^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}\times(\ell_n)^2-\frac{1}{4\operatorname{sen}^2(\pi:n)}\times(\ell_n)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1+\operatorname{sen}^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}\right)}\times\ell_n = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}{\operatorname{sen}^2(\pi:n)}\right)}\times\ell_n =$$

UNE A 4:210 x 297

25 - 6 - 73

$= \boxed{\frac{1}{2}\ \ell_n}$ valor que se deduce directamente de la figura de la lámina.

Para el caso del dibujo, $n = 9$, $\ell_9 = 35{,}6$ mm, será:

$$c_n = \frac{1}{2} \times 35{,}6 = 17{,}8 \text{ mm.}$$

Ángulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquella.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_4} = \frac{2\,c_4}{\sqrt{4\,(d_4)^2 - (\ell_n)^2}} = 2 \times \frac{1}{2\ tg\ (\pi : n)} \times \ell_n : \sqrt{4 \times \frac{1}{2} \times (\ell_n)^2 - (\ell_n)^2} =$$

$$= \frac{\ell_n}{tg\ (\pi : n)} : \ell_n = \frac{1}{tg\ (\pi : n)} = \boxed{ctg\ (\pi : n)}$$

Este resultado puede obtenerse directamente de la figura de la lámina.

Ángulo rectilíneo "α_n" del diedro formado por una cara regular de "n" lados, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquella.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_n} = \frac{2\, c_n}{\sqrt{4\,(d_n)^2 - (\ell_n)^2}} = \frac{2 \times \frac{1}{2}\, \ell_n}{\sqrt{4 \times \frac{1}{4\, \operatorname{sen}^2(\pi : n)} \times (\ell_n)^2 - (\ell_n)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi : n)} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}^2(\pi : n)}{\operatorname{sen}^2(\pi : n}}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\pi : n)}{\cos^2(\pi : n)}} = \boxed{\operatorname{tg}(\pi : n)}$$

Este resultado puede obtenerse directamente de la figura de la lámina.

<u>Angulo rectilineo "φ_{4-n}" del diedro formado por una cara cuadrada y otra regular de "n" lados</u>

Aplicando la fórmula general [4) (lám. 33)

$$\varphi_{4-n} = \alpha_4 + \alpha_n \qquad \text{de donde}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\varphi_{4-n})} = \operatorname{tg}(\alpha_4 + \alpha_n) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_4 + \operatorname{tg}\alpha_n}{1 - \operatorname{tg}\alpha_4\, \operatorname{tg}\alpha_n} = \frac{\operatorname{ctg}(\pi : n) + \operatorname{tg}(\pi : n)}{1 - \operatorname{ctg}(\pi : n)\, \operatorname{tg}(\pi : n)} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}(\pi : n) + \operatorname{tg}(\pi : n)}{1 - 1} = \boxed{\infty}$$ para cualquier valor creciente de "n"

y por consiguiente, siempre será:

$$\boxed{\varphi_{4-n} = 90^\circ}$$

Esta propiedad se deduce directamente de la figura de la lámina (estos arquimedianos son prismas rectos regulares de bases P_n y caras laterales cuadradas).

Angulo rectilíneo "φ_{4-4}" del diedro formado por dos caras cuadradas

Aplicando la fórmula general [4] (lám. 33)

$$\varphi_{4-4} = 2\,\alpha_4 \qquad \text{de donde}$$

$$\boxed{tg\,\varphi_{4-4}} = tg\,(2\,\alpha_4) = \frac{2\,tg\,\alpha_4}{1-tg^2\,\alpha_4} = \frac{2\,ctg\,(\pi:n)}{1-ctg^2\,(\pi:n)} = \frac{2}{\frac{1}{ctg\,(\pi:n)} - ctg\,(\pi:n)} =$$

$$= \frac{2}{tg\,(\pi:n) - \frac{1}{tg\,(\pi:n)}} = \frac{2}{\frac{tg^2(\pi:n)-1}{tg\,(\pi:\pi)}} = \frac{2\,tg\,(\pi:n)}{-\left(1-tg^2(\pi:n)\right)} =$$

$$= -\frac{2\,tg\,(\pi:n)}{1-tg^2\,(\pi:n)} = -\,tg\,\left(2\times(\pi:n)\right) = \boxed{-\,tg\,(2\pi:n)}$$

y de esta última

$$\boxed{\varphi_{4-4}} = \pi - \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi n - 2\pi}{n} = \boxed{\pi \times \frac{n-2}{n}}$$

Este resultado puede obtenerse directamente de la figura de la lámina

Para el caso del dibujo, $n = 9$, será

$$\underline{\varphi_{4-4}} = 180^\circ \times \frac{9-2}{9} = \underline{140^\circ}$$

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de "n" caras cuadradas de

lado "ℓ_n" y 2 caras regulares de "n" lados y de igual magnitud "ℓ_n".

La apotema de una cara regular de "n" lados, en función de su lado "ℓ_n", (ver fórmula [2], lám 46, hoja 4), es

$$k_n = \frac{1}{2\ \mathrm{tg}\,(\pi : n)}\ \ell_n$$

El área total será pues:

$$\boxed{S} = n\left(\ell_n\right)^2 + \frac{n\ \ell_n}{2} \times \frac{1}{2\ \mathrm{tg}\,(\pi:n)} \times \ell_n = \left(n + \frac{n}{4\ \mathrm{tg}\,(\pi:n)}\right)\left(\ell_n\right)^2 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{4\ \mathrm{tg}\,(\pi:n)}\right) n\left(\ell_n\right)^2 = \boxed{\left(1 + \frac{1}{4}\ \mathrm{ctg}\,(\pi:n)\right) n\left(\ell_n\right)^2}$$

<u>Volumen "V" del arquimediano</u>

Se compone de la suma de "n" pirámides regulares de base cuadrada y altura "c_4", y de 2 pirámides de base regular de "n" lados y altura "c_n".

Su valor será pues:

$$\boxed{V} = n\left(\ell_n\right)^2 \times \frac{1}{2\ \mathrm{tg}\,(\pi:n)} \times \frac{\ell_n}{3} + 2 \times \frac{n\ \ell_n}{2} \times \frac{1}{2\ \mathrm{tg}\,(\pi:n)} \times \ell_n \times \frac{\ell_n}{2\times 3} =$$

$$= \left(\frac{1}{6\ \mathrm{tg}\,(\pi:n)} + \frac{1}{12\ \mathrm{tg}\,(\pi:n)}\right) n\left(\ell_n\right)^3 = \frac{1}{4\ \mathrm{tg}\,(\pi:n)}\ n\left(\ell_n\right)^3 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\ \mathrm{ctg}\,(\pi:n)\ n\left(\ell_n\right)^3}$$

UNE A 4: 210 x 297

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de "n" cuadrados de lado "l_n" y de 2 caras regulares de "n" lados, de igual magnitud "l_n". El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran 2 cuadrados y un polígono regular de "n" lados.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, se resumen los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\text{sen}^2(\pi:n)}{\text{sen}^2(\pi:n)}}\; l_n$	Variable con "n"
b	$\frac{1}{2\,\text{sen}\,(\pi:n)}\; l_n$	Variable con "n"
c_4	$\frac{1}{2\,\text{tg}\,(\pi:n)}\; l_n$	Variable con "n"
c_n	$\frac{1}{2}\; l_n$	$0,50\,00\,00\ldots\, l_n$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\; l_n$	$0,70\,71\,07\ldots\, l_n$
d_n	$\frac{1}{2\,\text{sen}\,(\pi:n)}\; l_n$	Variable con "n"
m	$\sqrt{\frac{1}{1+\text{sen}^2(\pi:n)}}\; l_n$	Variable con "n"
α_4	$\text{tg}\,\alpha_4 = \text{ctg}\,(\pi:n)$	$\alpha_4 = \text{arc cotg.}\,(\pi:n)$ Variable con "n"
α_n	$\text{tg}\,\alpha_n = \text{tg}\,(\pi:n)$	$\alpha_n = \text{arc tg}\,(\pi:n)$ Variable con "n"
φ_{4-n}	$\frac{\pi}{2}$	$\varphi_{4-n} = 90°$
φ_{4-4}	$\pi \times \frac{n-2}{n}$	Variable con "n"
S	$\left[1+\frac{1}{4}\,\text{ctg}\,(\pi:n)\right] n\,(l_n)^2$	Variable con "n"
V	$\frac{1}{4}\,\text{ctg}\,(\pi:n)\; n\,(l_n)^3$	Variable con "n"

UNE A 4:210 x 297

27-6-73

PROCESO GRÁFICO-ANALITICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 47, a la representación gráfica de un Arquimediano de la Serie Bn, en el caso particular de ser $n=9$.

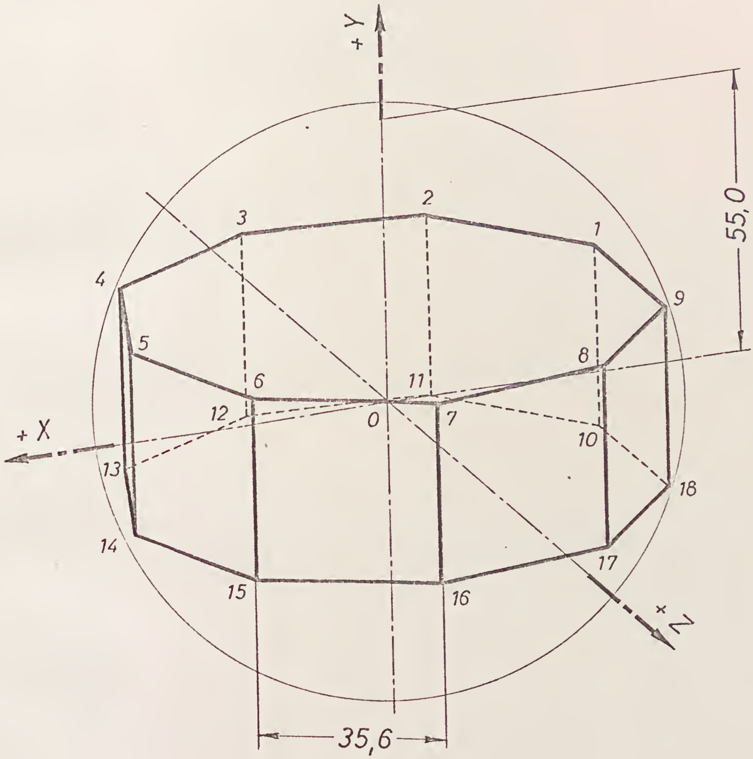
Para su trazado nos valdremos de las cotas calculadas por las fórmulas anteriores, determinadas previamente para $n=9$. Dichas magnitudes las obtendremos en función lado "l_9" del arquimediano, cuya longitud es de 35,6 mm.

El cálculo de dichas magnitudes se efectúa a continuación:

l_9	= Datō del ejercicio		= 35,6 mm
a	= 1,54 50 43 1	× 35,6	= 55,0 mm
b	= 1,46 19 02 0	× 35,6	= 52,0 mm
c_4	= 1,37 37 39 6	× 35,6	= 48,9 mm
C_9	= 0,5	× 35,6	= 17,8 mm
d_4	= 0,70 71 06 8	× 35,6	= 25,2 mm
d_9	= 1,46 19 02 0	× 35,6	= 52,0 mm

Con ayuda de estas cotas es fácil obtener las proyecciones del arquimediano sobre I, II y III, ya que éste tiene la forma de un prisma recto regular, cuyas bases son de "n" lados y altura "l_n".

En la lámina 47 hemos situado el arquimediano, con sus bases paralelas a II y su centro en O. El polígono de la base se puede dibujar fácilmente, conocidos el radio de la circunferencia circunscrita $b = 52,0$ mm y la longitud de su lado $l_9 = 35,6$ mm



n = 9

Arquimedianos Serie B_n